אינדוקציה מתמטית

5 יחידות לימוד, כיתה יא'

תכנית לימודים חדשה

שאלון 571

הסברים, דוגמאות ותרגילים

מותאם למיקוד מועדי תשפ"ה

יואל גבע, אריק דז'לדטי

אינדוקציה מתמטית

אינדוקציה מתמטית היא שיטת הוכחה במתמטיקה שבעזרתה ניתן להוכיח נכונות של טענות, שבהן ערכי המשתנה הם מספרים טבעיים. אנו מכירים מהעבר שיטות של הוכחה ישירה והוכחה על דרך השלילה. נוסיף לארגז הכלים עוד שיטת הוכחה.

כאשר נרצה להוכיח נכונות של טענה עבור **כל** n טבעי, ונתקשה להוכיח אותה ישירות, נוכל להיעזר בשיטת האינדוקציה המתמטית.

על פי שיטת הוכחה זו,
אם טענה מתייחסת למספרים טבעיים,
אז כדי להוכיח שהטענה נכונה עבור כל n טבעי,
היא צריכה לקיים את שתי התכונות הבאות:

(1) הטענה צריכה להיות נכונה עבור $n=1$. **זה "בסיס האינדוקציה"**.
(2) בהנחה שהטענה נכונה עבור $n=k$ (k הוא מספר טבעי כלשהו)
נובע שהטענה נכונה עבור $n=k+1$ (המספר העוקב לו).
זה נקרא "צעד האינדוקציה".

על פי עקרון האינדוקציה, אם הטענה מקיימת את שתי התכונות הנ"ל, נובע שהיא נכונה עבור כל n טבעי.

הסבר:
על פי תכונה (1) הטענה נכונה עבור $n=1$.
על פי תכונה (2), אם הטענה נכונה עבור $\mathbf{n=k}$,
נובע שהיא נכונה עבור $\mathbf{n=k}+1$.
מאחר והטענה נכונה עבור $\mathbf{n=1}$, נובע שהיא נכונה עבור $\mathbf{n=1}+1$,
כלומר עבור $n=2$.
כעת אנו יודעים שהטענה נכונה עבור $\mathbf{n=2}$, ולכן בשילוב תכונה (2)
נובע שהטענה נכונה עבור $\mathbf{n=2}+1$, כלומר עבור $n=3$.
באותה דרך, כעת אנו יודעים שהטענה נכונה עבור $\mathbf{n=3}$,
לכן בשילוב תכונה (2) נובע שהטענה נכונה עבור $\mathbf{n=3}+1$,
כלומר עבור $n=4$.
אם נמשיך בדרך זו נקבל שהטענה נכונה עבור כל n טבעי.

כדי להוכיח באינדוקציה שטענה נכונה עבור כל n טבעי נפעל לפי השלבים הבאים:

שלב א' – בדיקה:

נבדוק שהטענה נכונה עבור $n=1$, כלומר נציב 1 במקום n ונראה שהטענה נכונה. **שלב זה נקרא "בסיס האינדוקציה"**.
הבדיקה מהווה חלק מהותי מההוכחה השלמה באינדוקציה.

שלב ב' – על סמך ההנחה שהטענה נכונה עבור $n=k$,
נוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+1$.
שלב זה נקרא "צעד האינדוקציה".

צעד האינדוקציה כולל שני חלקים:

הנחת האינדוקציה:

נניח שהטענה נכונה עבור מספר טבעי $n=k$.
בשלב זה נרשום את הטענה כאשר במקום n נציב k.

הוכחה: נרשום את מה שצריך להוכיח עבור $n=k+1$.
בשלב זה נרשום את הטענה כאשר במקום n נציב $k+1$.
את ההוכחה שהטענה נכונה עבור $n=k+1$,
נבצע על סמך ההנחה שהטענה נכונה עבור $n=k$.

לאחר השלבים הנ"ל נרשום את המשפט המסכם הבא:
בדקנו שהטענה נכונה עבור $n=1$.
הראנו שמההנחה שהטענה נכונה עבור $n=k$ טבעי,
נובע שהיא נכונה עבור $n=k+1$, ולכן על פי עקרון האינדוקציה
נובע שהטענה נכונה עבור כל n טבעי.

הערה:

במקום להניח עבור k טבעי כלשהו ולהוכיח עבור $k+1$,
ניתן להניח עבור n טבעי ולהוכיח עבור $n+1$.

אינדוקציה – הוכחת שוויונות (אישור זהויות)

נראה שימוש באינדוקציה מתמטית כאשר נרצה להוכיח נכונות של שוויון עבור כל n טבעי.

דוגמה:

הוכיחו באינדוקציה שעבור כל n טבעי מתקיים השוויון:

$$2+5+8+11+\ \dots\ +(3n-1)=\frac{n(3n+1)}{2}$$

פתרון:

נתבונן תחילה באגף שמאל: $2+5+8+11+\ \dots\ +(3n-1)$.
באגף זה יש סכום של איברים. האיבר הראשון הוא 2,
האיבר שני הוא 5, האיבר השלישי הוא 8 וכו'.
האיבר האחרון באגף זה הוא $(3n-1)$.
ניתן לראות שה"חוקיות" באגף שמאל היא שכל איבר גדול ב-3 מקודמו.
האיבר האחרון באגף זה הוא $(3n-1)$, כלומר תלוי בערך של n.
עלינו להוכיח שעבור כל n טבעי סכום האיברים שבאגף שמאל

שווה לביטוי $\frac{n(3n+1)}{2}$ המופיע באגף ימין.

שימו לב! ההוכחה באינדוקציה אינה עוזרת למצוא את הנוסחה שבאגף ימין, אלא רק מוכיחה שהנוסחה נכונה.
שלב א' – בדיקה: נבדוק את נכונות השוויון עבור $n=1$,
כלומר **נראה שעבור $n=1$ שני האגפים שווים זה לזה.**
נתבונן באגף שמאל: $2+5+8+11+\ \dots\ +(3n-1)$
האיבר הראשון באגף שמאל הוא קבוע ושווה ל-2.
האיבר האחרון באגף שמאל הוא $(3n-1)$. כדי לדעת מהו האיבר האחרון עבור $n=1$, נציב $n=1$ בביטוי $(3n-1)$. נקבל: $(3\cdot1-1)$, כלומר 2.
קיבלנו שעבור $n=1$ האיבר האחרון באגף שמאל הוא 2.
ראינו שהאיבר הראשון הוא 2, ולכן עבור $n=1$ אגף שמאל שווה ל-2.

נעבור להתבונן באגף ימין: $\frac{n(3n+1)}{2}$. גם כאן נציב $n=1$.

נקבל: $\frac{1(3\cdot1+1)}{2}$, כלומר 2. קיבלנו שעבור $n=1$ שני האגפים שווים זה לזה (כל אחד מהם שווה ל-2) ומכאן שעבור $n=1$ הנוסחה הנכונה.

נבדוק את נכונות השוויון עבור $n=2$, כלומר **נראה שעבור $n=2$ שני האגפים שווים זה לזה. <u>לא חייבים לבצע</u> בדיקה זו. נעשה זאת כעת כדי לחזק את הבנת שלב הבדיקה.**

האיבר האחרון באגף שמאל הוא $(3n-1)$. כדי לדעת מהו האיבר האחרון עבור $n=2$, נציב $n=2$ בביטוי $(3n-1)$. נקבל: $(3\cdot 2-1)$, כלומר 5.
נקבל שעבור $n=2$ האיבר האחרון באגף שמאל הוא 5.
ראינו שהאיבר הראשון באגף שמאל הוא 2, לכן עבור $n=2$ אגף שמאל שווה ל- $2+5$, כלומר 7.

נעבור להתבונן באגף ימין: $\frac{n(3n+1)}{2}$. גם כאן נציב $n=2$.

נקבל: $\frac{2(3\cdot 2+1)}{2}$, כלומר 7. קיבלנו שעבור $n=2$ שני האגפים שווים זה לזה (כל אחד מהם שווה ל- 7) ומכאן שעבור $n=2$ השוויון נכון.

הערה: ניתן להמשיך ולבצע הצבות נוספות ($n=3, 4, 5, 6, ...$).
ואולם, לא משנה כמה ערכים נציב במקום n,
זה עדיין לא מוכיח שהטענה נכונה עבור כל n טבעי.

שלב ב' – צעד האינדוקציה.
הנחה: נניח שהטענה נכונה עבור מספר טבעי $n=k$,
כלומר נניח שמתקיים: $2+5+8+11+\ ...\ +(3k-1)=\frac{k(3k+1)}{2}$

בהסתמך על ההנחה נוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+1$.
כדי לרשום את מה שצריך להוכיח, נציב בנוסחה $(k+1)$ במקום n.
האיבר האחרון באגף שמאל של הוא $(3n-1)$.
נציב $(k+1)$ במקום n. נקבל: $(3(k+1)-1)$, כלומר $(3k+2)$.
אגף ימין של הנוסחה הוא $\frac{n(3n+1)}{2}$. נציב $(k+1)$ במקום n.

נקבל: $\frac{(k+1)(3(k+1)+1)}{2}$, כלומר $\frac{(k+1)(3k+4)}{2}$.

נקבל שצריך להוכיח: $2+5+8+\ ...\ +(3k+2)=\frac{(k+1)(3k+4)}{2}$

כדי להיעזר בהנחה נתבונן באגף שמאל של ההוכחה ונרשום את האיברים הנמצאים לפני $(3k+2)$ עד שנגיע לאיבר $(3k-1)$ שהוא האיבר האחרון בהנחה. כל איבר באגף שמאל גדול ב- 3 מקודמו, לכן כדי לקבל את האיבר שלפני $(3k+2)$ נחסר 3 מ- $(3k+2)$. נקבל $(3k+2)-3$, כלומר $(3k-1)$.
שהוא האיבר האחרון בהנחה. נקבל שצריך להוכיח:

$$2+5+8+\ ...\ +(3k-1)+(3k+2)=\frac{(k+1)(3k+4)}{2}$$

לפי הנחת האינדוקציה ניתן להחליף את הסכום: $2+5+8+\ ...\ +(3k-1)$
שבאגף שמאל בביטוי $\frac{k(3k+1)}{2}$.

נקבל שצריך להוכיח: $\underbrace{2+5+8+\ \dots\ +(3k-1)}+(3k+2)=\dfrac{(k+1)(3k+4)}{2}$

שווה $\dfrac{k(3k+1)}{2}$ לפי ההנחה

ניעזר בהנחה ונבצע החלפה זו.

נקבל שצריך להוכיח: $\dfrac{k(3k+1)}{2}+(3k+2)=\dfrac{(k+1)(3k+4)}{2}$

ניתן להוכיח שוויון זה בשתי דרכים:

דרך א': נמצא מכנה משותף ונפתח את שני האגפים.

נקבל שנותר להוכיח: $\dfrac{k(3k+1)+2(3k+2)}{2}=\dfrac{(k+1)(3k+4)}{2}$

המכנה זהה בשני האגפים. מספיק להוכיח שהמונים שווים.

נקבל שנותר להוכיח: $3k^2+7k+4=3k^2+7k+4$

ניתן לראות ששני האגפים שווים.

דרך ב': נפתח את אגף שמאל ונקבל את אגף ימין.

נתבונן באגף שמאל: $\dfrac{k(3k+1)}{2}+(3k+2)$.

לאחר פתיחת סוגריים וכינוס איברים דומים נקבל: $\dfrac{3k^2+7k+4}{2}$.

בעזרת פירוק הטרינום (באמצעות פתרונות המשוואה הריבועית),
נקבל במונה $(k+1)(3k+4)$ וזהו בדיוק אגף ימין.

**משפט מסכם: בדקנו שהשוויון נכון עבור $n=1$. הראנו שמההנחה שהשוויון נכון עבור $n=k$ נובע שהוא נכון עבור $n=k+1$,
ולכן על פי עקרון האינדוקציה נובע שהשוויון נכון עבור כל n טבעי.**

הערות:

(1) במקום להניח עבור k טבעי ולהוכיח עבור $k+1$,
ניתן להניח עבור n טבעי ולהוכיח עבור $n+1$.

(2) במעבר מ- $n=k$ ל- $n=k+1$ התווסף לאגף שמאל **איבר אחד,**
שהוא $(3k+2)$. <u>על פי תכנית הלימודים, תמיד יתווסף איבר אחד</u>.

<u>**שימו לב!**</u>

**שני שלבי האינדוקציה (שלב הבסיס ושלב הצעד) אינם תלויים זה בזה. קיומו של אחד אינו מעיד על קיומו של השני.
אם הוכחנו את אחד השלבים ולא הוכחנו את השלב האחר, לא השלמנו את ההוכחה באינדוקציה, כלומר לא הוכחנו שהטענה נכונה עבור כל n טבעי.**

תרגילים

הוכיחו באינדוקציה כי עבור כל n טבעי מתקיים :

1. $1+2+3+4+\ \dots\ +n=\frac{n(n+1)}{2}$

2. $1+3+5+7+\dots\ +(2n-1)=n^2$

3. $6+8+10+12+\dots\ +(2n+4)=n(n+5)$

4. $3+6+9+\dots\ +(3n)=\frac{3n(n+1)}{2}$

5. $2+5+8+\ \dots\ +(3n-1)=\frac{n(3n+1)}{2}$

6. $3+7+11+15+...+(4n-1)=n(2n+1)$

7. $12+17+22+27+\dots\ +(5n+7)=\frac{n(5n+19)}{2}$

דוגמה:

הוכיחו באינדוקציה שעבור כל n טבעי מתקיים:

$$\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\ \dots\ +\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$$

פתרון:

שלב א' – בדיקה: נבדוק את נכונות הטענה עבור $n=1$.

נתבונן תחילה באגף שמאל.

האיבר הראשון באגף שמאל הוא קבוע ושווה ל- $\frac{1}{1\cdot3}$.

האיבר האחרון באגף שמאל הוא $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

כדי לדעת מהו האיבר האחרון באגף שמאל עבור $n=1$,
נציב $n=1$ בביטוי $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$. נקבל: $\frac{1}{1\cdot3}$.

נקבל שעבור $n=1$: האיבר הראשון באגף שמאל הוא $\frac{1}{1\cdot3}$ וגם האיבר האחרון באגף שמאל הוא $\frac{1}{1\cdot3}$, לכן עבור $n=1$ אגף שמאל כולל איבר אחד בלבד שהוא $\frac{1}{1\cdot3}$ ומכאן שעבור $n=1$ אגף שמאל כולו שווה ל- $\frac{1}{3}$.

נעבור להתבונן באגף ימין: $\frac{n}{2n+1}$. גם כאן נציב $n=1$.

נקבל: $\frac{1}{2\cdot1+1}$, כלומר $\frac{1}{3}$. קיבלנו שעבור $n=1$ שני האגפים שווים זה לזה (כל אחד מהם שווה ל- $\frac{1}{3}$) ומכאן שעבור $n=1$ הטענה נכונה.

שלב ב' – שלב הצעד.

הנחה: נניח שהטענה נכונה עבור $n=k$, כלומר נניח שמתקיים:

$$\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\ \dots\ +\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{k}{2k+1}$$

בהסתמך על ההנחה צריך להוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+1$:

$$\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\ \dots\ +\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{k+1}{2k+3}$$

הערה: על פי החוקיות שבאגף שמאל כל איבר הוא למעשה שבר.
המונה של השבר קבוע ושווה ל- 1. המכנה של השבר הוא מכפלה.
המספרים שבצד שמאל של מכפלה זו הם: $1,\ 3,\ 5,\dots$
כך שהחוקיות ביניהם היא שכל מספר גדול ב- 2 מקודמו.
המספרים שבצד ימין של המכפלה זו הם: $3,\ 5,\ 7,\dots$
כך שהחוקיות ביניהם היא שכל מספר גדול ב- 2 מקודמו.

כמו כן, כל סוגריים מומלץ לקחת הצידה, להציב בהם $n=k+1$,
להחזיר אותם באותה תבנית עם סוגריים, ולוודא שהחוקיות נשמרה.

לדוגמה: בגורם $(2n-1)$ נקבל: $(2(k+1)-1)=(2k+1)$

בגורם $(2n+1)$ נקבל: $(2(k+1)+1)=(2k+3)$

נקבל שצריך להוכיח:

$$\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\ \dots\ +\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{k+1}{2k+3}$$

לפי הנחת האינדוקציה נחליף את הסכום:

$\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\ \dots\ +\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$ שבאגף שמאל בביטוי $\frac{k}{2k+1}$.

נקבל שצריך להוכיח: $\frac{k}{2k+1}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{k+1}{2k+3}$

נוכיח את הזהות על פי אחת הדרכים שהראינו בדוגמה הקודמת.

על פי עקרון האינדוקציה נובע שהטענה נכונה עבור כל n טבעי.

הוכיחו באינדוקציה כי עבור כל n טבעי מתקיים:

.8 $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+4\cdot5+\dots\ +n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

.9 $1\cdot3+2\cdot4+3\cdot5+4\cdot6+\dots\ +n(n+2)=\frac{n}{6}(n+1)(2n+7)$

.10 $3\cdot8+4\cdot9+5\cdot10+\dots+(n+2)(n+7)=\frac{1}{3}n(n+7)(n+8)$

.11 $\frac{1\cdot4}{2}+\frac{2\cdot5}{2}+\frac{3\cdot6}{2}+\frac{4\cdot7}{2}+\dots\ +\frac{n(n+3)}{2}=\frac{n(n+1)(n+5)}{6}$

.12 $1\cdot4+2\cdot7+3\cdot10+4\cdot13+\dots\ +n(3n+1)=n(n+1)^2$

.13 $1\cdot2\ +\ 3\cdot5\ +\ 5\cdot8\ +\dots\ +(2n-1)(3n-1)=\frac{1}{2}n(4n^2+n-1)$

.14 $2\cdot6+5\cdot7+8\cdot8+11\cdot9+\dots\ +(3n-1)(n+5)=\frac{n(2n^2+17n+5)}{2}$

.15 $2\cdot5+4\cdot6+6\cdot7+8\cdot8+\dots\ 2n(n+4)=\frac{n(n+1)(2n+13)}{3}$

16. $$1^2+2^2+3^2+4^2+\dots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

17. $$1^2+3^2+5^2+7^2+\dots+(2n-1)^2=\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$$

18. $$1^3+2^3+3^3+\dots+n^3=\frac{n^2}{4}(n+1)^2$$

19. $$2^3+4^3+6^3+\dots+(2n)^3=2\left[n(n+1)\right]^2$$

20. $$(1^2+1)+(2^2+2)+(3^2+3)+\dots+(n^2+n)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

21. $$1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+\dots+n(n+1)(n+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

22. $$1\cdot2\cdot3\cdot4+2\cdot3\cdot4\cdot5+\dots+n(n+1)(n+2)(n+3)=\frac{n}{5}(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$$

הוכיחו באינדוקציה כי עבור כל n טבעי מתקיים :

23. $$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

24. $$\frac{5}{5\cdot6}+\frac{5}{6\cdot7}+\frac{5}{7\cdot8}+\dots+\frac{5}{(n+4)(n+5)}=\frac{n}{n+5}$$

25. $$\frac{1}{1\cdot4}+\frac{1}{4\cdot7}+\frac{1}{7\cdot10}+\dots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{n}{3n+1}$$

26. $$\frac{1}{1\cdot5}+\frac{1}{5\cdot9}+\frac{1}{9\cdot13}+\dots+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{n}{4n+1}$$

27. $$\frac{3}{1\cdot3}+\frac{3}{3\cdot5}+\frac{3}{5\cdot7}+\dots+\frac{3}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{3n}{2n+1}$$

28. $$\frac{2}{2\cdot4}+\frac{2}{3\cdot5}+\frac{2}{4\cdot6}+\dots+\frac{2}{(n+1)(n+3)}=\frac{5}{6}-\frac{2n+5}{(n+2)(n+3)}$$

$$\frac{3\cdot 1^2+1}{2\cdot 5}+\frac{3\cdot 2^2+2}{5\cdot 8}+\frac{3\cdot 3^2+3}{8\cdot 11}+\ \dots\ +\frac{3n^2+n}{(3n-1)(3n+2)}=\frac{n(n+1)}{3n+2}$$ **.29**

$$\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\frac{3^2}{5\cdot 7}+\ \dots\ +\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$$ **.30**

$$\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{2}{3\cdot 4\cdot 5}+\frac{3}{4\cdot 5\cdot 6}+\ \dots\ +\frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}=\frac{n(n+1)}{4(n+2)(n+3)}$$ **.31**

אינדוקציות שבהן החוקיות לא ברורה

דוגמה:

הוכיחו באינדוקציה שעבור כל n טבעי מתקיים:

$$4+14+30+\ \dots\ +n(3n+1)=n(n+1)^2$$

פתרון:

בשונה מהאינדוקציות שפתרנו עד עתה, במקרה זה ניתן לראות שהחוקיות שבאגף שמאל אינה ברורה, מאחר והאיבר האחרון שבאגף שמאל נתון כמכפלה, ואילו האיברים הראשונים שבאגף שמאל אינם נתונים כמכפלה. כפי שנראה, גם אם לא נבין את החוקיות באופן מלא, לא תיווצר בעיה בשלב ההוכחה, שכן <u>על פי תכנית הלימודים</u>, במעבר מ- $n=k$ ל- $n=k+1$, מתווסף לאגף שמאל תמיד <u>איבר אחד</u>.

כדי לזהות את החוקיות באגף שמאל נתבונן באיבר האחרון באגף זה שהוא המכפלה $n(3n+1)$ ונציב בו $n=1$, $n=2$ ו- $n=3$.

בעזרת הצבה זו נציג כמכפלה גם את האיברים הראשונים באגף שמאל.

נציב $n=1$. נקבל: $1(3\cdot 1+1)$, כלומר $1\cdot 4$.

המכפלה $1\cdot 4$ שווה ל- 4 שהוא האיבר הראשון באגף שמאל.

נציב $n=2$. נקבל: $2(3\cdot 2+1)$, כלומר $2\cdot 7$.

המכפלה $2\cdot 7$ שווה ל- 14 שהוא האיבר השני באגף שמאל.

נציב $n=3$. נקבל: $3(3\cdot 3+1)$, כלומר $3\cdot 10$.

המכפלה $3\cdot 10$ שווה ל- 30 שהוא האיבר השלישי באגף שמאל.

למעשה עלינו להוכיח באינדוקציה שעבור כל n טבעי מתקיים:

$$1\cdot 4+2\cdot 7+3\cdot 10+\ \dots\ +n(3n+1)=n(n+1)^2$$

כעת החוקיות באגף שמאל ברורה.

ניתן להוכיח את הטענה בדומה לכל האינדוקציות הקודמות שראינו.

הוכיחו באינדוקציה כי עבור כל n טבעי מתקיים :

32. $6+14+24+36+\ \dots\ +n(n+5)=\dfrac{n(n+1)(n+8)}{3}$

33. $10+18+28+\dots\ +(n+1)(n+4)=\dfrac{n(n+4)(n+5)}{3}$

34. $18+64+130+216+\ \dots\ +(2n+4)(5n-2)=\dfrac{n(10n^2+39n+5)}{3}$

35. $\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{20}+\ \dots\ +\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}=\dfrac{n}{2n+4}$

36. $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{15}+\dfrac{1}{24}+\ \dots\ +\dfrac{1}{n(n+2)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}\right)$

37. $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{15}+\dfrac{1}{35}+\ \dots\ +\dfrac{1}{4n^2-1}=\dfrac{n}{2n+1}$

38. $\dfrac{3}{4}+\dfrac{5}{36}+\dfrac{7}{144}+\ \dots\ +\dfrac{(2n+1)}{n^2(n+1)^2}=1-\dfrac{1}{(n+1)^2}$

39. $4+8+14+22+\ \dots\ +(n^2+n+2)=\dfrac{n(n^2+3n+8)}{3}$

40. $0+20+52+96+\ \dots\ +(6n^2+2n-8)=2n(n-1)(n+3)$

אינדוקציות עם חזקות

דוגמה:
הוכיחו באינדוקציה שעבור כל n טבעי מתקיים:

$$1\cdot 2^1+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\ \ldots\ +n\cdot 2^n=2+(n-1)\cdot 2^{n+1}$$

פתרון:
שלב א' – שלב בסיס האינדוקציה.
בדיקה: נבדוק את נכונות הטענה עבור $n=1$. נתבונן באגף שמאל.
האיבר הראשון באגף שמאל הוא קבוע ושווה ל- $1\cdot 2^1$.
האיבר האחרון באגף שמאל הוא $n\cdot 2^n$. כדי לדעת מהו האיבר האחרון עבור $n=1$, נציב $n=1$ בביטוי $n\cdot 2^n$. נקבל: $1\cdot 2^1$.
נקבל שעבור $n=1$ האיבר האחרון באגף שמאל הוא $1\cdot 2^1$, כלומר 2.
ראינו שהאיבר הראשון באגף שמאל הוא $1\cdot 2^1$, כלומר 2.
ולכן עבור $n=1$ אגף שמאל כולל איבר אחד שהוא $1\cdot 2^1$,
ומכאן שעבור $n=1$ אגף שמאל שווה ל-$1\cdot 2^1$, כלומר 2.
נעבור להתבונן באגף ימין: $2+(n-1)\cdot 2^{n+1}$. גם כאן נציב $n=1$.
נקבל: $2+(1-1)\cdot 2^{1+1}$, כלומר 2. קיבלנו שעבור $n=1$ שני האגפים שווים זה לזה (כל אחד מהם שווה ל- 2) ומכאן שעבור $n=1$ הטענה נכונה.
שלב ב' – שלב צעד האינדוקציה.
נניח שהטענה נכונה עבור מספר טבעי כלשהו $n=k$.
הנחת האינדוקציה: $1\cdot 2^1+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\ \ldots\ +k\cdot 2^k=2+(k-1)\cdot 2^{k+1}$
בהסתמך על כך נוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+1$,
כלומר **צרך להוכיח:** $1\cdot 2^1+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\ \ldots\ +(k+1)\cdot 2^{k+1}=2+k\cdot 2^{k+2}$
כדי לרשום באגף שמאל את האיברים הנמצאים לפני האיבר האחרון של ההוכחה שהוא $(k+1)\cdot 2^{k+1}$ נבחן את החוקיות באגף זה.

<u>הערה</u>: כפי שכבר הדגשנו, בתכנית החדשה, יתווסף להנחה תמיד רק איבר אחד, ולכן נוכל לדעת, גם מבלי להבין את החוקיות, שהאיבר הנמצא לפני האיבר האחרון של ההוכחה, הוא האיבר האחרון של הנחת האינדוקציה.

באגף שמאל כל איבר הוא מכפלה בין שני מספרים.
המספרים שבצד שמאל של המכפלה הם ... $1,\ 2,\ 3,$
כך שהחוקיות ביניהם היא שכל מספר גדול ב- 1 מקודמו.

המספרים שבצד ימין של המכפלה הם: $2^1,\ 2^2\ ,2^3,\dots$ כך שכל מספר הוא חזקה שהבסיס שלה קבוע ושווה ל- 2 והמעריך שלה גדול ב-1 מהמעריך של החזקה שלפניה. האיבר האחרון באגף שמאל של ההוכחה הוא $(k+1)\cdot 2^{k+1}$, לכן האיבר שלפניו הוא $(k+1-1)\cdot 2^{k+1-1}$, כלומר $k\cdot 2^k$.
זהו גם האיבר האחרון באגף שמאל של ההנחה. נקבל שצריך להוכיח:

$$1\cdot 2^1+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\ \dots\ +k\cdot 2^k+(k+1)\cdot 2^{k+1}=2+k\cdot 2^{k+2}$$

לפי הנחת האינדוקציה נחליף את הסכום: $1\cdot 2^1+2\cdot 2^2+3\cdot 2^2+\ \dots\ +k\cdot 2^k$ בביטוי $2+(k-1)\cdot 2^{k+1}$.

נקבל שצריך להוכיח: $2+(k-1)\cdot 2^{k+1}+(k+1)\cdot 2^{k+1}=2+k\cdot 2^{k+2}$

נחסר 2 משני האגפים. כמו כן, את הביטוי 2^{k+2} ניתן לפרק בשתי צורות בעזרת חוק: $a^{x+y}=a^x\cdot a^y$: $2^{k+2}=2^k\cdot 2^2$ או $2^{k+2}=2^{k+1}\cdot 2^1$.

נקבל שנותר להוכיח: $(k-1)\cdot 2^k\cdot 2^1+(k+1)\cdot 2^k\cdot 2=k\cdot 2^k\cdot 2^2$

הביטוי 2^k הוא חיובי ומופיע בכל המחוברים.

נקבל שנותר להוכיח: $2(k-1)+2(k+1)=4k$, כלומר: $4k=4k$.

ניתן לראות ששני האגפים שווים.

הטענה מקיימת את בסיס האינדוקציה ואת צעד האינדוקציה, ולכן על פי עקרון האינדוקציה הטענה נכונה עבור כל n טבעי.

הוכיחו באינדוקציה כי עבור כל n טבעי מתקיים:

41. $2^0+2^1+2^2+2^3+\ \dots\ +2^{n-1}=2^n-1$

42. $3+9+27+\ \dots\ +3^n=1.5(3^n-1)$

43. $\frac{4}{5}+\frac{4}{5^2}+\frac{4}{5^3}+\ \dots\ +\frac{4}{5^n}=1-\frac{1}{5^n}$

44. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ \dots\ +\frac{1}{2^{n-1}}=2-\frac{1}{2^{n-1}}$

45. $1\cdot 2^0+2\cdot 2^1+3\cdot 2^2+\ \dots\ +n\cdot 2^{n-1}=1+(n-1)2^n$

46. $1\cdot 2^1+3\cdot 2^2+5\cdot 2^3+7\cdot 2^4+\ \dots\ +(2n-1)2^n=6+(2n-3)2^{n+1}$

47. $1\cdot 3+2\cdot 9+3\cdot 27+\ \dots\ +n\cdot 3^n=\frac{1}{4}\left[(2n-1)3^{n+1}+3\right]$

$$1\cdot 1+2\cdot 2+3\cdot 4+\ \dots\ +n\cdot 2^{n-1}=1+(n-1)2^{n}$$ .48

$$3+5+9+17+\ \dots\ +(2^{n}+1)=2^{n+1}+n-2$$ .49

$$0+4+16+52+\ \dots\ +(2\cdot 3^{n-1}-2)=3^{n}-1-2n$$ .50

$$2+8+24+64+\ \dots\ +n\cdot 2^{n}=2+(n-1)2^{n+1}$$ .51

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\ \dots\ +\frac{n}{2^n}=2-\frac{n+2}{2^n}$$ .52

$$\frac{1}{1}+\frac{2}{3}+\frac{3}{9}+\ \dots\ +\frac{n}{3^{n-1}}=\frac{3^{n+1}-2n-3}{4\cdot 3^{n-1}}$$ .53

$$1+\frac{5}{5}+\frac{9}{25}+\ \dots\ +\frac{(4n-3)}{5^{n-1}}=\frac{1}{4}\left[10-\frac{4n+2}{5^{n-1}}\right]$$ .54

$$2+\frac{8}{3}+\frac{26}{9}+\ \dots\ +\frac{3^n-1}{3^{n-1}}=\frac{3^n(2n-1)+1}{2\cdot 3^{n-1}}$$ .55

$$\frac{3}{2}+\frac{9}{4}+\frac{33}{8}+\ \dots\ +\frac{2^{2n-1}+1}{2^n}=\frac{2^{2n}-1}{2^n}$$ .56

הוכחה באינדוקציה עבור n טבעי זוגי או אי-זוגי

שימו לב!

א. כדי להוכיח באינדוקציה שטענה נכונה עבור כל n טבעי <u>אי-זוגי</u>:

(1) נבדוק שהטענה נכונה עבור $n = 1$.

(2) מההנחה שהטענה נכונה עבור $n = k$ (k הוא מספר טבעי אי-זוגי כלשהו) נוכיח שהטענה נכונה עבור $n = k + 2$.

ב. כדי להוכיח באינדוקציה שטענה נכונה עבור כל n טבעי <u>זוגי</u>:

(1) נבדוק שהטענה נכונה עבור $n = 2$.

(2) מההנחה שהטענה נכונה עבור $n = k$ (k הוא מספר טבעי זוגי כלשהו) נוכיח שהטענה נכונה עבור $n = k + 2$.

דוגמה:

הוכיחו באינדוקציה (או בדרך אחרת) שעבור כל n טבעי זוגי מתקיים:

$$2+8+14+20+\ \dots\ +(3n-4)=\frac{n(3n-2)}{4}$$

פתרון:

שלב א' – בסיס האינדוקציה, כלומר ביצוע בדיקה:

עלינו להוכיח את הטענה עבור כל n טבעי זוגי, לכן בשלב הבדיקה נבדוק את נכונות הטענה עבור $n = 2$. נתחיל מאגף שמאל.

האיבר הראשון באגף שמאל הוא קבוע ושווה ל- 2.

האיבר האחרון באגף שמאל הוא $(3n-4)$. כדי לדעת מהו האיבר האחרון עבור $n = 2$, נציב בביטוי זה $n = 2$. נקבל: $(3\cdot 2-4)$, כלומר 2.

נקבל שעבור $n = 2$: האיבר הראשון באגף שמאל הוא 2 וגם האיבר האחרון באגף שמאל הוא 2, לכן עבור $n = 2$ אגף שמאל כולל רק איבר אחד בלבד השווה ל- 2 ומכאן שעבור $n = 2$ אגף שמאל כולו שווה ל- 2.

נעבור להתבונן באגף ימין: $\frac{n(3n-2)}{4}$. גם כאן נציב $n = 2$.

נקבל: $\frac{2\cdot 4}{4}$, כלומר 2. קיבלנו שעבור $n = 2$ שני האגפים שווים זה לזה (כל אחד מהם שווה ל- 2) ולכן עבור $n = 2$ הטענה נכונה.

שלב ב' – צעד האינדוקציה: נניח שהטענה נכונה עבור $n = k$ טבעי זוגי כלשהו, כלומר נניח שמתקיים:

$$2+8+14+20+\ \dots\ +(3k-4)=\frac{k(3k-2)}{4}$$

בהסתמך על כך נוכיח שהטענה נכונה עבור $n = k + 2$. נציב $(k+2)$ במקום n ונקבל שצריך להוכיח:

$$2+8+14+20+\ \dots\ +(3k+2)=\frac{(k+2)(3k+4)}{4}$$

על פי החוקיות שבאגף שמאל כל איבר גדול ב- 6 מקודמו. האיבר האחרון באגף שמאל של ההוכחה הוא $(3k+2)$, לכן האיבר שלפניו הוא $(3k+2-6)$, כלומר $(3k-4)$. זהו למעשה האיבר האחרון באגף שמאל של ההנחה.

נקבל שצריך להוכיח: $2+8+14+20+\ \dots\ +(3k-4)+(3k+2)=\frac{(k+2)(3k+4)}{4}$

לפי הנחת האינדוקציה נחליף את הסכום: $2+8+14+20+\ \dots\ +(3k-4)$

בביטוי $\frac{k(3k-2)}{4}$. נקבל שצריך להוכיח: $\frac{k(3k-2)}{4}+(3k+2)=\frac{(k+2)(3k+4)}{4}$

כעת נוכיח בדרך אלגברית ששני האגפים שווים.

נראה זאת באחת הדרכים שהצגנו בדוגמאות הקודמות.

בדקנו שהטענה נכונה עבור $n=2$.

הראנו שמההנחה שהטענה נכונה עבור $n=k$ (k מספר טבעי זוגי) נובע שהיא נכונה עבור $n=k+2$ ולכן על פי עקרון האינדוקציה נובע שהטענה נכונה עבור כל n טבעי זוגי.

הוכיחו באינדוקציה כי עבור כל n טבעי אי-זוגי מתקיים:

.57 $1+5+9+\ \dots\ +(2n-1)=\frac{n(n+1)}{2}$

.58 $1+7+13+19+\ \dots\ +(3n-2)=\frac{(n+1)(3n-1)}{4}$

הוכיחו באינדוקציה כי עבור כל n טבעי זוגי מתקיים:

.59 $1+5+9+13+\ \dots\ +(2n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$

.60 $2+8+14+\ \dots\ +(3n-4)=\frac{n(3n-2)}{4}$

אינדוקציות עם סימנים מתחלפים

נדון עכשיו באינדוקציות הכוללות הוכחת שוויונות, שבהן באגף שמאל הסימנים מתחלפים, כלומר האיברים הם חיוביים ושליליים לסירוגין.

בשאלות כאלה נקבל חזקות בעלות בסיס שלילי ומעריך אפס או טבעי.
דוגמאות: $(-1)^4$, $(-5)^3$, $(-6)^2$.
נשים לב שכאשר בסיס החזקה הוא שלילי ומעריך החזקה הוא <u>זוגי</u>,
ערך החזקה הוא חיובי. לדוגמה: $(-1)^4$, $(-5)^2$.
לעומת זאת, כאשר בסיס החזקה הוא שלילי ומעריך החזקה הוא <u>אי זוגי</u>,
ערך החזקה הוא שלילי. לדוגמה: $(-1)^3$, $(-4)^5$.
כאשר בסיס החזקה הוא שלילי ומעריך החזקה כולל מספר טבעי n ,
יש לבדוק האם מעריך החזקה הוא זוגי או אי זוגי.
לדוגמה: $(-1)^n$ הוא חיובי כאשר n זוגי.
$(-1)^n$ הוא שלילי כאשר n אי זוגי.

דוגמה:
הוכיחו באינדוקציה שעבור כל n טבעי מתקיים:

$$10-14+18-22+\ \dots\ +(-1)^{n-1}(4n+6)=(-1)^{n-1}(2n+4)+4$$

הערה: האיברים באגף שמאל הם -22 , 18 , -14 , 10
המנגנון שקובע את סימני האיברים הוא הביטוי $+(-1)^{n-1}$.
כאשר מעריך החזקה הוא זוגי האיבר הוא חיובי,
וכאשר מעריך החזקה הוא אי זוגי האיבר הוא שלילי.
לכל האיברים יש סימן "פלוס" לפניהם.
הסימנים המתחלפים מתקבלים על פי מעריך החזקה $(-1)^{n-1}$.
(הערה: הערך המוחלט של האיברים הוא סדרה חשבונית שהפרשה 4).

פתרון:
שלב א' – בסיס האינדוקציה: נבדוק את נכונות הטענה עבור $n=1$.
נתחיל מאגף שמאל: $10-14+18-22+\ \dots\ +(-1)^{n-1}(4n+6)$
האיבר הראשון באגף שמאל הוא קבוע ושווה ל- 10 .
האיבר האחרון באגף שמאל הוא $(-1)^{n-1}(4n+6)$.
כדי לדעת מהו האיבר האחרון עבור $n=1$, נציב $n=1$ בביטוי זה.
נקבל: $(-1)^0(4\cdot1+6)$, כלומר 10 . קיבלנו שעבור $n=1$: האיבר הראשון באגף שמאל הוא 10 וגם האיבר האחרון הוא 10 , לכן עבור $n=1$ אגף שמאל כולו כולל איבר אחר בלבד השווה ל- 10 , ומכאן שעבור $n=1$ אגף

שמאל כולו שווה ל- 10. נעבור להתבונן באגף ימין: $(-1)^{n-1}(2n+4)+4$
גם כאן נציב $n=1$. נקבל $(-1)^{1-1}(2\cdot1+4)+4$, כלומר 10.
קיבלנו שעבור $n=1$ שני האגפים שווים זה לזה (שניהם שווים ל- 10)
ומכאן שעבור $n=1$ הטענה נכונה.

שלב ב' – שלב צעד האינדוקציה.
נניח שהטענה נכונה עבור מספר טבעי כלשהו $n=k$, כלומר שמתקיים:
$$10-14+18-22+\ \dots\ +(-1)^{k-1}(4k+6)=(-1)^{k-1}(2k+4)+4$$
בהסתמך על כך נוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+1$, כלומר נקבל

שצריך להוכיח: $10-14+18-22+\ \dots\ +(-1)^{k}(4k+10)=(-1)^{k}(2k+6)+4$

באגף שמאל נרשום את האיבר האחרון של הנחת האינדוקציה.
נקבל שצריך להוכיח:
$$10-14+18-22+\ \dots\ +(-1)^{k-1}(4k+6)+(-1)^{k}(4k+10)=(-1)^{k}(2k+6)+4$$
לפי הנחת האינדוקציה ניתן להחליף את הסכום:
$10-14+18-22+\ \dots\ +(-1)^{k-1}(4k+6)$, בביטוי $(-1)^{k-1}(2k+4)+4$.

לאחר שנבצע החלפה זו נקבל שצריך להוכיח:
$$(-1)^{k-1}(2k+4)+4+(-1)^{k}(4k+10)=(-1)^{k}(2k+6)+4$$

נחסר 4 משני האגפים. נקבל שצריך להוכיח:
$$(-1)^{k-1}(2k+4)+(-1)^{k}(4k+10)=(-1)^{k}(2k+6)$$

במקום $(-1)^{k-1}$ נרשום $\frac{(-1)^k}{(-1)^1}$, כלומר $-(-1)^k$.

נקבל שנותר להוכיח: $-(-1)^{k}(2k+4)+(-1)^{k}(4k+10)=(-1)^{k}(2k+6)$.
הביטוי $(-1)^k$ שונה מאפס, והוא גורם בכל אחד מהמחוברים.
נקבל שנותר להוכיח: $-(2k+4)+(4k+10)=2k+6$,
לאחר פתיחת סוגריים, נקבל שנותר להוכיח: $2k+6=2k+6$.
ניתן לראות ששני האגפים שווים זה לזה.

על פי עקרון האינדוקציה נובע שהטענה נכונה עבור כל n טבעי.

הוכיחו באינדוקציה כי עבור כל n טבעי מתקיים:

61. $1-2+4-8+\ \dots\ +(-2)^{n-1}=\frac{1}{3}\left[1-(-2)^n\right]$

62. $5-20+80-320+\ \dots\ +5(-4)^{n-1}=1-(-4)^n$

$$-3+9-27+81+\ \dots\ +(-3)^{n}=\frac{-3-(-3)^{n+1}}{4}$$ **.63**

$$-3+15-75+375-\ \dots\ -3(-5)^{n-1}=\tfrac{1}{2}[(-5)^{n}-1]$$ **.64**

$$-\frac{6}{5}+\frac{6}{5^2}-\frac{6}{5^3}+\frac{6}{5^4}+\ \dots\ +\frac{6}{(-5)^{n}}=\left(-\frac{1}{5}\right)^{n}-1$$ **.65**

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ \dots\ +\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{2}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}\right]$$ **.66**

$$1-2+3-4+\ \dots\ +(-1)^{n+1}\cdot n=\tfrac{1}{4}\left[(-1)^{n+1}(2n+1)+1\right]$$ **.67**

$$-2+5-8+11+\ \dots\ +(-1)^{n}(3n-1)=\tfrac{1}{4}\left[(-1)^{n}(6n+1)-1\right]$$ **.68**

$$1^2-2^2+3^2-4^2+\ \dots\ +(-1)^{n+1}\cdot n^2=\frac{(-1)^{n+1}\cdot n(n+1)}{2}$$ **.69**

$$-2\cdot5+3\cdot6-4\cdot7+\ \dots\ +(-1)^{n}(n+1)(n+4)=\tfrac{1}{4}\left[(-1)^{n}(2n^2+12n+13)-13\right]$$ **.70**

$$16-26+40-58+\ \dots\ +(-1)^{n+1}(2n^2+4n+10)=(-1)^{n+1}(n^2+3n+6)+6$$ **.71**

$$1+5+5+9+9+\ \dots\ +[2n+(-1)^{n}]=n(n+1)+\frac{(-1)^{n}}{2}-\frac{1}{2}$$ **.72**

$$\frac{4}{1\cdot3}-\frac{8}{3\cdot5}+\frac{12}{5\cdot7}-\frac{16}{7\cdot9}+\ \dots\ +\frac{(-1)^{n-1}\cdot4n}{(2n-1)(2n+1)}=1+\frac{(-1)^{n-1}}{2n+1}$$ **.73**

$$1\cdot(-2)^0+2\cdot(-2)^1+3\cdot(-2)^2+\ \dots\ +n(-2)^{n-1}=\tfrac{1}{9}\left[n(-2)^{n+1}-(n+1)(-2)^{n}+1\right]$$ **.74**

$$\frac{1}{1}-\frac{4}{2}+\frac{7}{4}-\frac{10}{8}+\ \dots\ +\frac{3n-2}{(-2)^{n-1}}=\frac{-2n}{(-2)^{n}}$$ **.75**

אינדוקציות עם מושג העצרת

נדון באינדוקציות הכוללות את המושג **"עצרת של מספר"**.

המושג **n עצרת** מסומן על ידי **$n!$** ומוגדר (רק למספרים טבעיים) באופן הבא: $\mathbf{n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ \ldots \ \cdot n}$.

לדוגמה: $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$, $7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7$, $1! = 1$.

הערה: עבור $n = 0$ מגדירים $0! = 1$.

מההגדרות הנ"ל נובע לדוגמה: $5! = 4! \cdot 5$, $8! = 7! \cdot 8$, $10! = 8! \cdot 9 \cdot 10$.

באופן דומה מתקיים: $(n+1)! = n!(n+1)$, $(n+2)! = (n+1)!(n+2)$

$n! = (n-1)! \cdot n$, $(n+2)! = n!(n+1)(n+2)$

כאשר נרצה להוכיח זהות עם עצרת, אז בשלב צעד האינדוקציה נפרק את ביטויי העצרת לעצרת הקטנה מבין השתיים.

הערה: השימוש במושג העצרת רלוונטי גם לנוסחת ברנולי בהסתברות.

דוגמה:

הוכיחו באינדוקציה כי עבור כל n טבעי מתקיים:

$$3! + \frac{4!}{1!} + \frac{5!}{2!} + \ \ldots \ + \frac{(n+2)!}{(n-1)!} = \frac{(n+3)!}{4(n-1)!}$$

פתרון:

א. **שלב א' – בסיס האינדוקציה:** נבדוק את נכונות הטענה עבור $n = 1$.

נתבונן תחילה באגף שמאל.

האיבר הראשון באגף שמאל הוא קבוע ושווה ל- $3!$.

הערה: על פי החוקיות, האיבר הראשון הוא למעשה $3! = \frac{3!}{1} = \frac{3!}{0!}$

האיבר האחרון באגף שמאל הוא $\frac{(n+2)!}{(n-1)!}$.

נציב $n = 1$ בביטוי $\frac{(n+2)!}{(n-1)!}$. נקבל: $\frac{3!}{0!} = 3!$.

עבור $n = 1$: אגף שמאל כולו שווה ל- $3!$, כלומר שווה ל- $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

הערה: אפשר לחשב את $3!$ גם באמצעות המחשבון.

נעבור להתבונן באגף ימין: $\frac{(n+3)!}{4(n-1)!}$. גם כאן נציב $n = 1$.

נקבל: $\frac{4!}{4 \cdot 0!}$, כלומר $6 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{4 \cdot 1}$.

הערה: אפשר לחשב את $\frac{4!}{4\cdot 0!}$ גם באמצעות המחשבון.

שני האגפים שווים זה לזה עבור $n=1$, ומתקיים בסיס האינדוקציה.

שלב ב' – צעד האינדוקציה.

הנחה: נניח שהטענה נכונה עבור $n=k$, כלומר נניח שמתקיים:

$$3!+\frac{4!}{1!}+\frac{5!}{2!}+\ \dots\ +\frac{(k+2)!}{(k-1)!}=\frac{(k+3)!}{4(k-1)!}$$

בהסתמך על ההנחה צריך להוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+1$:

$$3!+\frac{4!}{1!}+\frac{5!}{2!}+\ \dots\ +\frac{(k+2)!}{(k-1)!}+\frac{(k+3)!}{k!}=\frac{(k+4)!}{4\cdot k!}$$

לפי הנחת האינדוקציה נחליף את הסכום:

$3!+\frac{4!}{1!}+\frac{5!}{2!}+\ \dots\ +\frac{(k+2)!}{(k-1)!}$ שבאגף שמאל בביטוי $\frac{(k+3)!}{4(k-1)!}$.

נקבל שצריך להוכיח: $\frac{(k+3)!}{4(k-1)!}+\frac{(k+3)!}{k!}=\frac{(k+4)!}{4\cdot k!}$

נוכיח את הזהות על פי אחת הדרכים שהראינו בדוגמאות קודמות.

נותר להוכיח: $\frac{(k+3)!}{4(k-1)!}+\frac{(k+3)!}{k!}=\frac{(k+4)!}{4\cdot k!}$

במכנה: ניעזר בכך ש- $k!=(k-1)!\cdot k=k\cdot(k-1)!$

נותר להוכיח: $\frac{(k+3)!}{4(k-1)!}+\frac{(k+3)!}{(k-1)!k}=\frac{(k+4)!}{4\cdot(k-1)!k}$

נותר להוכיח: $\frac{k(k+3)!+4(k+3)!}{4(k-1)!k}=\frac{(k+4)!}{4\cdot(k-1)!k}$

המכנים זהים, לכן נותר להוכיח שהמונים זהים.

נותר להוכיח: $k(k+3)!+4(k+3)!=(k+4)!$

באגף ימין ניעזר בפירוק $(k+4)!=(k+3)!(k+4)$.

באגף שמאל נוציא גורם משותף $(k+3)!$

נותר להוכיח: $(k+3)!(k+4)=(k+3)!(k+4)$

ניתן להסיק על פי עקרון האינדוקציה כי הטענה נכונה עבור כל n טבעי.

הוכיחו באינדוקציה כי עבור כל n טבעי מתקיים:

.76 $1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! + \ \dots\ + n\cdot n! = (n+1)! - 1$

.77 $3! + \frac{4!}{1!} + \frac{5!}{2!} + \ \dots\ + \frac{(n+2)!}{(n-1)!} = \frac{(n+3)!}{4(n-1)!}$

.78 $\frac{0}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \ \dots\ + \frac{n}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$

.79 $3\cdot 2^0\cdot 1! + 5\cdot 2^1\cdot 2! + 7\cdot 2^2\cdot 3! + \ \dots\ + (2n+1)2^{n-1}\cdot n! = 2^n(n+1)! - 1$

.80 $9\cdot 5\cdot 1! + 14\cdot 5^2\cdot 2! + 19\cdot 5^3\cdot 3! + \ \dots\ + (5n+4)\cdot 5^n\cdot n! = 5^{n+1}(n+1)! - 5$

.81 $\frac{0\cdot 1!}{2^1} + \frac{1\cdot 2!}{2^2} + \frac{2\cdot 3!}{2^3} + \ \dots\ + \frac{(n-1)n!}{2^n} = \frac{(n+1)!}{2^n} - 1$

.82 $\frac{2}{1!} - \frac{3}{2!} + \frac{4}{3!} + \ \dots\ + \frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{n!} = 1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n!}$

מקרים שבהם נתונה רק הנוסחה לאיבר הכללי

דוגמה:

סדרה מוגדרת לכל n טבעי על ידי הנוסחה: $a_n = 6\cdot 2^{n-1} - 1$.

נסמן: $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ ... \ + a_n$.

הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים: $S_n = 6(2^n - 1) - n$.

פתרון:

עלינו להוכיח: $a_1 + a_2 + a_3 + \ ... \ + a_n = 6(2^n - 1) - n$.

שלב א' – בסיס האינדוקציה: נבדוק את נכונות הטענה עבור $n = 1$.

באגף שמאל: האיבר הראשון באגף שמאל הוא a_1.

האיבר האחרון באגף שמאל הוא a_n. נציב $n = 1$. נקבל a_1.

נקבל שעבור $n = 1$: אגף שמאל כולו שווה ל- a_1.

נציב $n = 1$ בנוסחה $a_n = 6\cdot 2^{n-1} - 1$. נקבל: $a_1 = 6\cdot 2^{1-1} - 1 = 5$.

נציב $n = 1$ באגף שמאל $S_n = 6(2^n - 1) - n$. נקבל: $S_1 = 6(2^1 - 1) - 1 = 5$

סיימנו את שלב בסיס האינדוקציה.

שלב ב' – צעד האינדוקציה.

נניח שהטענה נכונה עבור $n = k$, כלומר נניח שמתקיים:

$a_1 + a_2 + a_3 + \ ... \ + a_k = 6(2^k - 1) - k$.

על סמך ההנחה נוכיח שהטענה נכונה עבור $n = k + 1$,

כלומר נוכיח שמתקיים: $a_1 + a_2 + a_3 + \ ... \ + a_k + a_{k+1} = 6(2^{k+1} - 1) - (k + 1)$.

לפי הנחת האינדוקציה ניתן להחליף את הסכום: $a_1 + a_2 + a_3 + \ ... \ + a_k$.

שבאגף שמאל בביטוי $6(2^k - 1) - k$.

נותר להוכיח: $6(2^k - 1) - k + a_{k+1} = 6(2^{k+1} - 1) - (k + 1)$.

על פי הנוסחה $a_n = 6\cdot 2^{n-1} - 1$, נקבל $a_{k+1} = 6\cdot 2^{k+1-1} - 1$.

נפתח את שני האגפים ונראה שהם שווים.

.83 סדרה מוגדרת לכל n טבעי על-ידי הנוסחה: $a_n = n(n + 2)$.

הוכיחו באינדוקציה: $a_1 + a_2 + \ ... \ + a_n = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$.

.84 סדרה מוגדרת לכל n טבעי על ידי הנוסחה: $a_n = 6\cdot 2^{n-1} - 1$.

הוכיחו כי עבור כל n טבעי מתקיים:

$a_1 + a_2 + a_3 + \ ... \ + a_n = 6(2^n - 1) - n$

אינדוקציות שבהן בבדיקה באגף שמאל
מקבלים איבר שאינו האיבר הראשון משמאל

דוגמה:

הוכיחו באינדוקציה שעבור כל n טבעי מתקיים:

$$2\cdot6+5\cdot7+8\cdot8+11\cdot9+\ \dots\ +(3n+5)(n+7)=\frac{(n+2)(2n^2+25n+47)}{2}$$

פתרון:

נתבונן תחילה באגף שמאל: $2\cdot6+5\cdot7+8\cdot8+\ \dots\ +(3n+5)(n+7)$

באגף זה יש סכום של איברים. האיבר הראשון הוא $2\cdot6$, האיבר השני הוא $5\cdot7$, וכו'. האיבר האחרון באגף זה הוא $(3n+5)(n+7)$.

ניתן לראות שכל איבר באגף שמאל הוא למעשה מכפלה בין שני מספרים.

המספרים שבצד שמאל של המכפלות הם $\dots\ ,8\ ,5\ ,2$ כך שה"חוקיות" ביניהם היא שכל מספר גדול ב- 3 מקודמו.

המספרים שבצד ימין של המכפלות הם: $\dots\ ,8\ ,7\ ,6$ כך שה"חוקיות" ביניהם היא שכל מספר גדול ב- 1 מקודמו.

שלב א' – שלב בסיס האינדוקציה. נבצע בדיקה:

נבדוק את נכונות הטענה עבור $n=1$. נתבונן תחילה באגף שמאל.

האיבר הראשון באגף שמאל הוא קבוע ושווה למכפלה $2\cdot6$.

האיבר האחרון באגף שמאל הוא $(3n+5)(n+7)$.

נציב $n=1$ בביטוי $(3n+5)(n+7)$. נקבל: $(3\cdot1+5)(1+7)$, כלומר $8\cdot8$.

נקבל שעבור $n=1$: האיבר הראשון באגף שמאל הוא $2\cdot6$,

האיבר האחרון באגף שמאל הוא $8\cdot8$, ומכאן שעבור $n=1$

אגף שמאל כולו שווה ל- $2\cdot6+5\cdot7+8\cdot8$, כלומר שווה ל- 111.

נעבור להתבונן באגף ימין: $\frac{(n+2)(2n^2+25n+47)}{2}$.

נציב $n=1$. נקבל: $\frac{(1+2)(2\cdot1^2+25\cdot1+47)}{2}$, כלומר $\frac{3\cdot74}{2}$ ומכאן 111.

קיבלנו שעבור $n=1$ שני האגפים שווים (כל אחד מהם שווה ל- 111)

ולכן עבור $n=1$ הטענה נכונה.

שלב ב' – שלב צעד האינדוקציה.

נניח שהטענה נכונה עבור מספר טבעי כלשהו $n=k$, כלומר שמתקיים:

$$2\cdot6+5\cdot7+8\cdot8+\ \dots\ +(3k+5)(k+7)=\frac{(k+2)(2k^2+25k+47)}{2}$$

בהסתמך על כך נוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+1$.
כאן נרשום את הטענה כאשר במקום n נציב $(k+1)$.
האיבר האחרון באגף שמאל של הטענה הוא $(3n+5)(n+7)$.
נציב $(k+1)$ במקום n ונקבל: $(3(k+1)+5)((k+1)+7)$, כלומר $(3k+8)(k+8)$.
אגף ימין של הטענה הוא $\frac{(n+2)(2n^2+25n+47)}{2}$.
נציב $(k+1)$ במקום n ונקבל: $\frac{((k+1)+2)(2(k+1)^2+25(k+1)+47)}{2}$,
כלומר $\frac{(k+3)(2k^2+29k+74)}{2}$.
צריך להוכיח: $2\cdot 6+5\cdot 7+8\cdot 8+\ \dots\ +(3k+8)(k+8)=\frac{(k+3)(2k^2+29k+74)}{2}$

כדי להיעזר בהנחה נתבונן באגף שמאל של ההוכחה ונרשום את האיברים הנמצאים לפני האיבר האחרון שהוא $(3k+8)(k+8)$ עד שנגיע לאיבר האחרון באגף שמאל של ההנחה שהוא $(3k+5)(k+7)$.
על פי החוקיות שבאגף שמאל, כדי לקבל את האיבר שלפניו נחסר 3 מהביטוי שבצד שמאל של המכפלה ונחסר 1 מהביטוי שבצד ימין של המכפלה. נקבל: $(3k+8-3)(k+8-1)$, כלומר $(3k+5)(k+7)$.
האיבר שקיבלנו הוא האיבר האחרון באגף שמאל של ההנחה.

<u>הבנת החוקיות עוזרת לוודא שפתרנו נכון</u>. נקבל שצריך להוכיח:

$$2\cdot 6+5\cdot 7+8\cdot 8+\ \dots\ +(3k+5)(k+7)+(3k+8)(k+8)=\frac{(k+3)(2k^2+29k+74)}{2}$$

על פי ההנחה נחליף את הסכום: $2\cdot 6+5\cdot 7+8\cdot 8+\ \dots\ +(3k+5)(k+7)$
שבאגף שמאל בביטוי $\frac{(k+2)(2k^2+25k+47)}{2}$. נקבל שצריך להוכיח:

$$\frac{(k+2)(2k^2+25k+47)}{2}+(3k+8)(k+8)=\frac{(k+3)(2k^2+29k+74)}{2}$$

באגף שמאל נמצא מכנה משותף 2 ונקבל שנותר להוכיח:

$$\frac{(k+2)(2k^2+25k+47)+2(3k+8)(k+8)}{2}=\frac{(k+3)(2k^2+29k+74)}{2}$$

המכנה זהה בשני האגפים. לכן נותר להוכיח שהמונים שווים.
לאחר פתיחת סוגריים וכינוס איברים דומים בשני האגפים,
נקבל שצריך להוכיח: $2k^3+35k^2+161k+222=2k^3+35k^2+161k+222$
ניתן לראות ששני האגפים שווים.

על פי עקרון האינדוקציה נובע שהטענה נכונה עבור כל n טבעי.

הוכיחו באינדוקציה כי עבור כל n טבעי מתקיים:

85. $5+11+17+\ \dots\ +(6n+11)=(n+2)(3n+8)$

86. $2\cdot 3+3\cdot 4+4\cdot 5+5\cdot 6+\dots\ +(n+2)(n+3)=\frac{(n+1)(n^2+8n+17)}{3}$

87. $\frac{2}{2\cdot 5}+\frac{2}{5\cdot 8}+\frac{2}{8\cdot 11}+\ \dots\ +\frac{2}{(3n+2)(3n+5)}=\frac{n+1}{3n+5}$

88. $1\cdot 5+2\cdot 5^2+3\cdot 5^3+\dots\ +(n+2)\cdot 5^{n+2}=\frac{5+(4n+7)5^{n+3}}{16}$

89. $-2+3+2+11+14+\ \dots\ +\left[n^2+2(-1)^{n+1}\right]=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(-1)^{n+1}-1$

90. $\frac{2}{3^1\cdot 1!}+\frac{5}{3^2\cdot 2!}+\frac{8}{3^3\cdot 3!}+\ \dots\ +\frac{3n+2}{3^{n+1}\cdot(n+1)!}=1-\frac{1}{3^{n+1}\cdot(n+1)!}$

מקרים נוספים שבהם ההוכחה אינה עבור כל n טבעי

הערה: אם נרצה להוכיח נכונות של טענה עבור כל n טבעי החל מ- n מסוים שגדול מ- 1, נבצע את הבדיקה עבור ה- n המסוים ולא עבור $n=1$.
לדוגמה: אם נרצה להוכיח שהטענה נכונה עבור n טבעי שגדול או שווה ל- 2, נבצע את הבדיקה עבור $n=2$. השלבים האחרים יתבצעו כרגיל.

91. הוכיחו באינדוקציה שעבור כל n טבעי שגדול מ- 2 מתקיים:
$7+9+11+\ \dots\ +(2n+1)=(n+4)(n-2)$

92. הוכיחו באינדוקציה שעבור כל n טבעי שגדול מ- 1 מתקיים:
$6-12+20-\ \dots\ +(-1)^n n(n+1)=\frac{1}{4}\left[(-1)^n(2n^2+4n+1)+7\right]$

93. סדרה מוגדרת לכל n טבעי על ידי הנוסחה: $a_n=n(n+3)$.
הוכיחו כי עבור $n\ge 3$ מתקיים:
$a_1+a_2+a_3+\ \dots\ +a_{n-2}=\frac{(n-2)(n-1)(n+3)}{3}$

דוגמה:

להלן שלושה שוויונות המתייחסים למספרים טבעיים.

רק אחד מן השלושה נכון לכל n טבעי.

קבעו באיזה שוויון מדובר, והוכיחו אותו באינדוקציה:

$$1\cdot 3\cdot 5+2\cdot 4\cdot 6+3\cdot 5\cdot 7+\ \ldots\ +n(n+2)(n+4)=\frac{1}{4}(n+2)(3n+1)(4n+1)$$

$$1\cdot 3\cdot 5+2\cdot 4\cdot 6+3\cdot 5\cdot 7+\ \ldots\ +n(n+2)(n+4)=\frac{n}{4}(n+1)(n+4)(n+5)$$

$$1\cdot 3\cdot 5+2\cdot 4\cdot 6+3\cdot 5\cdot 7+\ \ldots\ +n(n+2)(n+4)=\frac{n}{8}(n+1)(n+2)(n+19)$$

פתרון מקוצר:

נבדוק את נכונות כל אחת מהטענות עבור $n=1$.

נראה שכולן נכונות, כלומר מקיימות את בסיס האינדוקציה.

נבדוק את נכונות הטענות עבור $n=2$. כולן נכונות.

נבדוק את נכונות הטענות עבור $n=3$.

רק הטענה השנייה נכונה עבור $n=3$ (זו כנראה הטענה הנכונה...).

כעת נוכיח באינדוקציה את נכונות הטענה השנייה.

.94 להלן שני שוויונות המתייחסים למספרים טבעיים.

רק אחד מן השניים נכון לכל n טבעי. הוכיחו אותו באינדוקציה:

$$1\cdot 2^2+2\cdot 3^2+3\cdot 4^2+\ \ldots\ +n(n+1)^2=\frac{n}{6}(n+1)(n+2)(n+3)$$

$$1\cdot 2^2+2\cdot 3^2+3\cdot 4^2+\ \ldots\ +n(n+1)^2=\frac{n}{12}(n+1)(n+2)(3n+5)$$

.95 להלן שלושה שוויונות המתייחסים למספרים טבעיים.

רק אחד מן השלושה נכון לכל n טבעי.

הוכיחו אותו באינדוקציה:

$$15+48+105+\ \ldots\ +n(n+2)(n+4)=\frac{1}{4}(n+2)(3n+1)(4n+1)$$

$$15+48+105+\ \ldots\ +n(n+2)(n+4)=\frac{n}{4}(n+1)(n+4)(n+5)$$

$$15+48+105+\ \ldots\ +n(n+2)(n+4)=\frac{n}{8}(n+1)(n+2)(n+19)$$

כשלים באינדוקציה

דוגמה:

נתונה הטענה: $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ \dots\ +\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{4n+1}{2(2n+1)}$

א. הראו שאם הטענה נכונה עבור $n=k$ טבעי כלשהו,
אז היא נכונה גם עבור $n=k+1$.

ב. האם מתשובתכם לסעיף א', ניתן להסיק שהטענה נכונה עבור
כל n טבעי? נמקו.

פתרון:

א. נניח שהטענה נכונה עבור $n=k$, כלומר נניח שמתקיים:

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ \dots\ +\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{4k+1}{2(2k+1)}$$

בהסתמך על ההנחה נוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+1$:

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ \dots\ +\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{4k+5}{2(2k+3)}$$

על פי החוקיות שבאגף שמאל, נקבל שצריך להוכיח:

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ \dots\ +\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{4k+5}{2(2k+3)}$$

לפי הנחת האינדוקציה נחליף את הסכום:

$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ \dots\ +\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$ שבאגף שמאל בביטוי $\frac{4k+1}{2(2k+1)}$.

נקבל שצריך להוכיח: $\frac{4k+1}{2(2k+1)}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{4k+5}{2(2k+3)}$

נוכיח את הזהות על פי אחת הדרכים שהראינו בדוגמה הקודמת.

ב. לא ניתן להסיק, מכיוון שלא ביצענו את שלב בסיס האינדוקציה.
לא בדקנו את נכונות הטענה עבור $n=1$.

הערה:

גם אם שלב הבדיקה יתקיים (וכאן הוא לא יתקיים) והטענה נכונה
עבור כל n טבעי, תשובתנו לסעיף ב' לא תשתנה.

דוגמה:

נתונה הטענה:

$$1\cdot3\cdot5+2\cdot4\cdot6+3\cdot5\cdot7+\ \dots\ +n(n+2)(n+4)=\frac{1}{4}(n+2)(3n+1)(4n+1)$$

א. הראו שהטענה נכונה עבור $n=1$, ונכונה עבור $n=2$.

ב. האם מתשובתכם לסעיף א', ניתן להסיק שהטענה נכונה עבור כל n טבעי? נמקו.

פתרון:

א. נבצע בדיקה ונראה שהטענה נכונה עבור $n=1$, ועבור $n=2$.

ב. בסעיף א' ראינו שמתקיים בסיס האינדוקציה.
מאחר ולא הראינו שמתקיים צעד האינדוקציה,
לא ניתן להסיק שהטענה נכונה עבור כל n טבעי.

הערה:

גם אם שלב הצעד יתקיים (וכאן הוא לא יתקיים) והטענה נכונה עבור כל n טבעי, תשובתנו לסעיף ב' לא תשתנה.

96. נתונה הטענה:

$$\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\ \dots\ +\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{4n+1}{2(2n+1)}$$

א. הראו שאם הטענה נכונה עבור $n=k$ טבעי כלשהו,
אז היא נכונה גם עבור $n=k+1$.

ב. האם מתשובתכם לסעיף א', ניתן להסיק שהטענה נכונה עבור כל n טבעי? נמקו.

97. נתונה הטענה:

$$3+5+9+17+\ \dots\ +(2^n+1)=2^{n+1}+n-2$$

א. הראו שאם הטענה נכונה עבור $n=k$ טבעי כלשהו,
אז היא נכונה גם עבור $n=k+1$.

ב. האם מתשובתכם לסעיף א', ניתן להסיק שהטענה נכונה עבור כל n טבעי? נמקו.

98. נתונה הטענה:

$$1\cdot4+2\cdot7+3\cdot10+4\cdot13+\dots\ +n(3n+1)=n(n+1)^2$$

א. הראו שהטענה נכונה עבור $n=1$, ונכונה עבור $n=2$.

ב. האם מתשובתכם לסעיף א', ניתן להסיק שהטענה נכונה עבור כל n טבעי? נמקו.

99. נתונה הטענה: $\frac{1\cdot 2^2}{3!}+\frac{2\cdot 2^3}{4!}+\frac{3\cdot 2^4}{5!}+\ \dots\ +\frac{n\cdot 2^{n+1}}{(n+2)!}=2-\frac{2^{n+2}}{(n+2)!}$

א. הראו שהטענה נכונה עבור $n=1$, ונכונה עבור $n=2$.
ב. האם מתשובתכם לסעיף א', ניתן להסיק שהטענה נכונה עבור כל n טבעי? נמקו.

תשובות:

96. ב. לא. **97.** ב. לא. **98.** ב. לא. **99.** ב. לא.

אינדוקציות הכוללות זהויות טריגונומטריות

הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי מתקיימות הזהויות הטריגונומטריות הבאות:

100. $$\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha+\ \dots\ +\sin n\alpha=\frac{\sin\frac{n}{2}\alpha\cdot\sin\frac{n+1}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

101. $$\cos\alpha+\cos 3\alpha+\cos 5\alpha+\ \dots\ +\cos(2n-1)\alpha=\frac{\sin 2n\alpha}{2\sin\alpha}$$

102. $$\sin^2\alpha+\sin^2 2\alpha+\sin^2 3\alpha+\ \dots\ +\sin^2 n\alpha=\frac{1}{2}\left[n-\frac{\sin n\alpha\cdot\cos(n+1)\alpha}{\sin\alpha}\right]$$

103. $$\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\sin 5\alpha}{\sin\alpha}+\ \dots\ +\frac{\sin(2n-1)\alpha}{\sin\alpha}=\left(\frac{\sin n\alpha}{\sin\alpha}\right)^2$$

אינדוקציות עם חישובים מספריים

דוגמה:

א. הוכיחו באינדוקציה שעבור כל n טבעי מתקיים:

$$\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\ \dots\ +\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$$

ב. היעזרו בסעיף א' וחשבו את הסכום: $\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\ \dots\ +\frac{1}{39\cdot41}$

ג. היעזרו בסעיף א' וחשבו את הסכום: $\frac{1}{21\cdot23}+\frac{1}{23\cdot25}+\frac{1}{25\cdot27}+\ \dots +\frac{1}{39\cdot41}$

ד. מצאו את האיבר האחרון בטור שמשמאל, אם סכום הטור הוא $\frac{36}{73}$.

פתרון:

א. **שלב א' – בדיקה:** נבדוק את נכונות הטענה עבור $n=1$.

האיבר הראשון באגף שמאל הוא קבוע ושווה ל- $\frac{1}{1\cdot3}$.

האיבר האחרון באגף שמאל הוא $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

כדי לדעת מהו האיבר האחרון באגף שמאל עבור $n=1$,
נציב $n=1$ בביטוי $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$. נקבל: $\frac{1}{1\cdot3}$.

נקבל שעבור $n=1$: האיבר הראשון באגף שמאל הוא $\frac{1}{1\cdot3}$ וגם האיבר האחרון באגף שמאל הוא $\frac{1}{1\cdot3}$, לכן עבור $n=1$ אגף שמאל כולל איבר אחד בלבד שהוא $\frac{1}{1\cdot3}$ ומכאן שעבור $n=1$ אגף שמאל כולו שווה ל- $\frac{1}{3}$.

נעבור להתבונן באגף ימין: $\frac{n}{2n+1}$. גם כאן נציב $n=1$.

נקבל: $\frac{1}{2\cdot1+1}$, כלומר $\frac{1}{3}$. קיבלנו שעבור $n=1$ שני האגפים שווים זה לזה (כל אחד מהם שווה ל- $\frac{1}{3}$) ומכאן שעבור $n=1$ הטענה נכונה.

שלב ב' – שלב הצעד.

הנחה: נניח שהטענה נכונה עבור $n=k$, כלומר נניח שמתקיים:

$$\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\ \dots\ +\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{k}{2k+1}$$

בהסתמך על ההנחה צריך להוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+1$:

$$\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\ \dots\ +\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{k+1}{2k+3}$$

הערה: על פי החוקיות שבאגף שמאל כל איבר הוא למעשה שבר.
המונה של השבר קבוע ושווה ל- 1. המכנה של השבר הוא מכפלה.
המספרים שבצד שמאל של מכפלה זו הם: $1,\ 3,\ 5,\ \dots$
כך שהחוקיות ביניהם היא שכל מספר גדול ב- 2 מקודמו.
המספרים שבצד ימין של המכפלה זו הם: $3,\ 5,\ 7,\ \dots$
כך שהחוקיות ביניהם היא שכל מספר גדול ב- 2 מקודמו.

כמו כן, כל סוגריים מומלץ לקחת הצידה, להציב בהם $n=k+1$,
להחזיר אותם באותה תבנית עם סוגריים, ולוודא שהחוקיות נשמרה.

לדוגמה: בגורם $(2n-1)$ נקבל: $(2(k+1)-1)=(2k+1)$

בגורם $(2n+1)$ נקבל: $(2(k+1)+1)=(2k+3)$

נקבל שצריך להוכיח:

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ \dots\ +\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{k+1}{2k+3}$$

לפי הנחת האינדוקציה נחליף את הסכום:

$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ \dots\ +\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$ שבאגף שמאל בביטוי $\frac{k}{2k+1}$.

נקבל שצריך להוכיח: $\frac{k}{2k+1}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{k+1}{2k+3}$

נוכיח את הזהות על פי אחת הדרכים שהראינו בדוגמה הקודמת.

על פי עקרון האינדוקציה נובע שהטענה נכונה עבור כל n טבעי.

ב. היעזרו בסעיף א׳ וחשבו את הסכום: $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ \dots\ +\frac{1}{39\cdot 41}$

פתרון:
הוכחנו בסעיף א׳ שלכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ \dots\ +\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$$

כדי לחשב את הסכום המבוקש, נמצא לאיזה ערך של n האיבר
האחרון שבאגף שמאל הוא $\frac{1}{39\cdot 41}$.

עלינו למצוא לאיזה ערך של n טבעי מתקיים $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{39\cdot 41}$.

נקבל $n=20$.

נקבל שמתקיים: $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ \dots\ +\frac{1}{39\cdot 41}=\frac{20}{2\cdot 20+1}$

ניתן לראות כי הסכום המבוקש שווה ל- $\frac{20}{2\cdot 20+1}$, כלומר $\frac{20}{41}$.

ג. היעזרו בסעיף א׳ וחשבו את הסכום: $\frac{1}{21\cdot 23}+\frac{1}{23\cdot 25}+\frac{1}{25\cdot 27}+\ \dots+\frac{1}{39\cdot 41}$

פתרון:

בסעיף ב׳ קיבלנו: $\frac{20}{41}=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ \dots\ +\frac{1}{39\cdot 41}$. ניתן לתאר את הקשר בין הסכום המבוקש לסכום שמצאנו בסעיף ב׳ באופן הבא:

$$\underbrace{\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ \dots\ +\frac{1}{19\cdot 21}+\overbrace{\frac{1}{21\cdot 23}+\ \dots\ +\frac{1}{39\cdot 41}}^{\text{הסכום המבוקש}}}_{\text{שווה } \frac{20}{41} \text{ לפי סעיף ב׳}}$$

אם נחשב את הסכום: $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ \dots\ +\frac{1}{19\cdot 21}$ ונחסר את

תוצאתו מהתוצאה שקיבלנו בסעיף ב׳ נקבל את הסכום המבוקש.

כדי לחשב את הסכום: $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ \dots\ +\frac{1}{19\cdot 21}$

נמצא לאיזה ערך של n טבעי האיבר האחרון באגף שמאל

הוא $\frac{1}{19\cdot 21}$. נקבל $n=10$.

נציב $n=10$ בטענה שהוכחנו בסעיף א׳.

נקבל שמתקיים: $\frac{10}{2\cdot 10+1}=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ \dots\ +\frac{1}{19\cdot 21}$

הסכום שווה ל- $\frac{10}{2\cdot 10+1}$, כלומר $\frac{10}{21}$.

הסכום המבוקש שווה לסכום $\frac{20}{41}$ שקיבלנו בסעיף ב׳ פחות

הסכום $\frac{10}{21}$. נקבל: $\frac{20}{41}-\frac{10}{21}$, כלומר $\frac{10}{861}$ וזהו הסכום המבוקש.

ד. מצאו את האיבר האחרון בטור שמשמאל, אם סכום הטור הוא $\frac{36}{73}$.

פתרון:

סכום הטור מיוצג על ידי הביטוי $\frac{n}{2n+1}$ שבאגף ימין.

הערך הטבעי המתקבל של n הוא $n=36$.

נציב $n=36$ באיבר האחרון שבאגף שמאל שהוא $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

נקבל: $\frac{1}{(2\cdot 36-1)(2\cdot 36+1)}$, כלומר $\frac{1}{71\cdot 73}$, ומכאן $\frac{1}{5183}$.

דוגמה:

א. הוכיחו באינדוקציה שעבור כל n טבעי מתקיים:

$$1^3+2^3+3^3+\ \dots\ +n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

ב. חשבו את הסכום: $7^3+8^3+9^3+\ \dots +14^3$

ג. מצאו נוסחה לסכום: $1^3+2^3+3^3+\ \dots +n^3+\ \dots\ +(2\cdot n)^3$

ד. מצאו נוסחה לסכום: $(2\cdot 1)^3+(2\cdot 2)^3+(2\cdot 3)^3+\ \dots\ +(2\cdot n)^3$

פתרון:

א. יש להוכיח באינדוקציה: שלב הבסיס ושלב הצעד.
בשאלה זו נדלג על ההוכחה, מאחר והראינו הוכחות כאלה.

ב. הוכחנו בסעיף א׳ שלכל n טבעי מתקיים:

$$1^3+2^3+3^3+\ \dots\ +n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

ניעזר בחיסור סכומים.
נחשב את הסכום $1^3+2^3+3^3+\ \dots\ +14^3$,
המתקבל על ידי הצבת $n=14$.
ממנו נחסר נחשב את הסכום $1^3+2^3+3^3+\ \dots\ +6^3$,
המתקבל על ידי הצבת $n=6$.

ג. הסכום שבסעיף ג׳ מתקבל כאשר מציבים באגף שמאל של סעיף א׳
$2n$ במקום n.
לכן נוסחת הסכום מתקבלת אף היא באותה דרך,
כלומר הסכום הוא: $\frac{(2n)^2(2n+1)^2}{4}=\frac{4n^2(2n+1)^2}{4}=n^2(2n+1)^2$

ד. ניעזר בחוקי חזקות ונקבל:

$$(2\cdot 1)^3+(2\cdot 2)^3+(2\cdot 3)^3+\ \dots\ +(2\cdot n)^3=$$

$$2^3\cdot 1^3+2^3\cdot 2^3+2^3\cdot 3^3+\ \dots\ +(2\cdot n)^3=$$

נוציא גורם משותף: $2^3\cdot(1^3+2^3+3^3+\ \dots\ +n^3)=$

נציב על פי ההוכחה באינדוקציה: $2^3\cdot\frac{n^2(n+1)^2}{4}=2n^2(n+1)^2$

דוגמה:

נתון שעבור כל n טבעי מתקיימת הטענה:

$$\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\dots+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\frac{an}{bn+1}$$

א. מצאו את a ואת b.

ב. הוכיחו באינדוקציה שעבור כל n טבעי הטענה אכן נכונה.

פתרון:

א. הטענה נכונה עבור כל n טבעי, כלומר נכונה עבור $n=1$, $n=2$ ...

עבור $n=1$ נקבל באגף שמאל $\frac{1}{1\cdot3}$, ובאגף ימין $\frac{a\cdot1}{b\cdot1+1}$.

שני האגפים שווים עבור $n=1$, כלומר $\frac{1}{3}=\frac{a}{b+1}$.

עבור $n=2$ נקבל באגף שמאל $\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}=\frac{2}{5}$, ובאגף ימין $\frac{a\cdot2}{b\cdot2+1}$.

שני האגפים שווים עבור $n=2$, כלומר $\frac{2}{5}=\frac{2a}{2b+1}$.

נפתור מערכת משוואות ונקבל $a=1$, $b=2$.

ב. יש להוכיח באינדוקציה: שלב הבסיס ושלב הצעד.

בשאלה זו נדלג על ההוכחה, מאחר והראינו הוכחות כאלה.

תרגילים

1. א. הוכח באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1^2+2^2+3^2+\ \dots\ +n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

ב. היעזר בסעיף א' וחשב את הסכום: $1^2+2^2+3^2+\ \dots\ +20^2$

2. א. הוכח באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{1}{2\cdot5}+\frac{1}{5\cdot8}+\frac{1}{8\cdot11}+\ \dots\ +\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}=\frac{n}{2(3n+2)}$$

ב. חשב את הסכום: $\frac{1}{2\cdot5}+\frac{1}{5\cdot8}+\frac{1}{8\cdot11}+\ \dots\ +\frac{1}{38\cdot41}$

3. א. הוכח באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1\cdot4+2\cdot5+3\cdot6+\ \dots\ +n(n+3)=\tfrac{1}{3}n(n+1)(n+5)$$

ב. חשב את הסכום: $1\cdot4+2\cdot5+3\cdot6+\ \dots\ +20\cdot23$

ג. חשב את הסכום: $1\cdot4+2\cdot5+3\cdot6+\ \dots\ +60\cdot63$

ד. היעזר בסעיפים קודמים וחשב את הסכום: $21\cdot24+22\cdot25+\ \dots\ +60\cdot63$

.4 א. הוכח באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$$

ב. חשב את הסכום: $17^2 + 19^2 + 21^2 + \ldots + 33^2$

.5 א. הוכח באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \ldots + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$$

ב. חשב את הסכום: $\frac{25}{12^2 \cdot 13^2} + \frac{27}{13^2 \cdot 14^2} + \ldots + \frac{57}{28^2 \cdot 29^2}$.

.6 א. הוכח באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1 \cdot 8 + 2 \cdot 9 + 3 \cdot 10 + \ldots + n(n+7) = \frac{n(n+1)(n+11)}{3}$$

ב. חשב את הסכום: $8 + 18 + 30 + \ldots + 170$

ג. חשב את הסכום: $98 + 120 + \ldots + 450$

.7 א. הוכח באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \ldots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{2n+4}$$

ב. חשב את הסכום: $\frac{1}{42} + \frac{1}{56} + \ldots + \frac{1}{210}$

.8 א. הוכח באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים:

$$9 + 17 + 27 + 39 + \ldots + (n^2 + 5n + 3) = \frac{n(n^2 + 9n + 17)}{3}$$

ב. חשב את הסכום: $39 + 53 + 69 + \ldots + 1053$

.9 א. הוכח באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \ldots + \frac{1}{n(n+2)} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+4}$$

ב. נתון שהאיבר האחרון בטור שבסעיף א' הוא $\frac{1}{224}$. חשב את סכום הטור.

10. א. הוכח באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{1}{4\cdot5}+\frac{1}{5\cdot6}+\frac{1}{6\cdot7}+\ \dots\ +\frac{1}{(n+3)(n+4)}=\frac{n}{4(n+4)}$$

ב. נתון שסכום n המחוברים הראשונים של הטור שבסעיף א' הוא $\frac{1}{5}$.

חשב את המחובר ה- n-י בטור.

11. א. הוכח באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\ \dots\ +\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

ב. מצא את הערך של n אם נתון:

$$\frac{1}{10\cdot11}+\frac{1}{11\cdot12}+\frac{1}{12\cdot13}+\ \dots\ +\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{20}$$

12. א. הוכח באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1^3+2^3+3^3+\ \dots\ +n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

ב. מצא את הערך של n אם נתון: $8^3+9^3+10^3+\ \dots\ +n^3=7497$

13. א. הוכח באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים:

$$5+7+11+19+\ \dots\ +(2^n+3)=2^{n+1}+3n-2$$

ב. חשב את הסכום: $5+7+11+\ \dots+1027$.

14. א. הוכח באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים:

$$6+36+162+\ \dots\ +2n\cdot3^n=\frac{(2n-1)3^{n+1}+3}{2}$$

ב. חשב את הסכום: $12\cdot729+\ \dots\ +20\cdot59049$.

15. א. הוכח באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים:

$$-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{5}{3!}+\frac{11}{4!}+\ \dots\ +\frac{n^2-n-1}{n!}=1-\frac{n+1}{n!}$$

ב. חשב את הסכום: $\frac{41}{7!}+\frac{55}{8!}+\ \dots\ +\frac{89}{10!}$

16. א. הוכח באינדוקציה שעבור כל n טבעי מתקיים:

$$12-17+22-27+\ \dots\ +(-1)^{n+1}(5n+7)=\frac{1}{4}\left[(-1)^{n+1}(10n+19)+19\right]$$

ב. חשב את הסכום: $12-17+22-27+\ \dots\ -67$

ג. חשב את הסכום: $-127+132-137+\ \dots\ +192$.

17. א. הוכח באינדוקציה שעבור כל n טבעי מתקיים:

$$\frac{1}{2}-\frac{7}{6}+\frac{17}{12}-\frac{31}{20}+\ \dots\ +\frac{(-1)^{n+1}(2n^2-1)}{n(n+1)}=\frac{(-1)^{n+1}\cdot n}{n+1}$$

ב. מצא את האיבר האחרון בטור שמשמאל, אם סכום הטור הוא $-\frac{14}{15}$.

18. א. הוכח באינדוקציה שלכל n טבעי <u>זוגי</u> מתקיים:

$$2+8+14+\ \dots\ +(3n-4)=\frac{n(3n-2)}{4}$$

ב. חשב את הסכום: $2+8+14+\ \dots\ +44$

ג. חשב את הסכום: $38+44+50+\ \dots\ +80$

19. א. p הוא מספר טבעי. הוכח באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1(1+p)+2(2+p)+3(3+p)+\ \dots\ +n(n+p)=\frac{n(n+1)(2n+1+3p)}{6}$$

ב. מצא את p אם נתון: $4(4+p)+5(5+p)+\ \dots\ +20(20+p)=4488$.

20. א. הוכח באינדוקציה שעבור כל n טבעי מתקיים:

$$1+2x+3x^2+4x^3+\ \dots\ +nx^{n-1}=\frac{nx^{n+1}-nx^n-x^n+1}{(x-1)^2}$$

ב. מצא נוסחה לסכום: $1\cdot 3^0+2\cdot 3^1+3\cdot 3^2+4\cdot 3^3+\ \dots\ +n\cdot 3^{n-1}$

21. נתון הטור: $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\dots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

הנוסחה $\frac{an}{bn+1}$ מייצגת את סכום n האיברים הראשונים של הטור.

א. מצא את a ואת b.

ב. הוכח באינדוקציה שעבור כל n טבעי נוסחת הסכום אכן נכונה.

.22 הנוסחה $An^2 - Bn + 1$ מייצגת את האיבר ה-n-י של הטור: $2\ ,\ 15\ ,\ 40\ ,\ \ldots$.

א. מצא את A ואת B.

ב. הוכח שעבור כל n טבעי מתקיים: $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \frac{n(4n^2 + n - 1)}{2}$

.23 א. הוכח באינדוקציה: $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$

ב. S_n הוא סכום n האיברים הראשונים של הטור שבסעיף א'.

חשב את n אם נתון: $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{132}$.

.24 א. הוכח באינדוקציה: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

ב. מצא (באמצעות n) נוסחה לסכום: $5\cdot 1^2 + 5\cdot 2^2 + 5\cdot 3^2 + \ldots + 5\cdot n^2$

ג. חשב את הסכום: $\frac{1^2}{6} + \frac{2^2}{6} + \frac{3^2}{6} + \ldots + \frac{13^2}{6}$

.25 א. הוכח באינדוקציה: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

ב. מצא נוסחה לסכום: $(2\cdot 1)^3 + (2\cdot 2)^3 + (2\cdot 3)^3 + \ldots + (2\cdot n)^3$

ג. חשב את הסכום: $\left(\frac{8}{7}\right)^3 + \left(\frac{9}{7}\right)^3 + \left(\frac{10}{7}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{22}{7}\right)^3$

.26 א. הוכח באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

ב. חשב בעזרת סעיף א' את הסכום: $\frac{4}{1\cdot 2} + \frac{4}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{4}{15\cdot 16}$

ג. חשב בעזרת סעיף א' את הסכום: $\frac{1}{1\cdot 10} + \frac{1}{2\cdot 15} + \frac{1}{3\cdot 20} + \ldots + \frac{1}{15\cdot 80}$

ד. חשב בעזרת סעיף א' את הסכום: $\frac{1}{5\cdot 10} + \frac{1}{10\cdot 15} + \frac{1}{15\cdot 20} + \ldots + \frac{1}{75\cdot 80}$

.27 א. הוכח באינדוקציה שעבור כל n טבעי מתקיים:

$$2 + 5\cdot 3^1 + 8\cdot 3^2 + \ldots + (3n-1)\cdot 3^{n-1} = \frac{1}{4}\left[(6n-5)\cdot 3^n + 5\right]$$

ב. היעזר בסעיף א' ומצא באמצעות n נוסחה לסכום:

$$2\cdot 3^n + 5\cdot 3^{n+1} + 8\cdot 3^{n+2} + \ldots + (3n-1)\cdot 3^{2n-1}$$

28. א. הוכח באינדוקציה שעבור כל n טבעי מתקיים:

$$1^2+2^2+3^2+\ \dots\ +n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

ב. מצא נוסחה לסכום: $1^2+2^2+3^2+\ \dots\ +(2n)^2$.

ג. מצא נוסחה לסכום: $(n+1)^2+(n+2)^2+\ \dots\ +(2n)^2$.

29. א. סדרה מוגדרת לכל n טבעי על ידי הנוסחה: $a_n=(-1)^n(4n+6)$.
הראה כי לכל n טבעי, סכום n האיברים הראשונים בסדרה הנתונה הוא $(-1)^n(2n+4)-4$.

ב. היעזר בסעיף א' בלבד וחשב את הסכום: $-30-34+38-\ \dots\ -38+62$.

תשובות:

1. ב. 2870. **2.** ב. $\frac{13}{82}$. **3.** ב. 3500. ג. 79300. ד. 75800. **4.** ב. 5865.

5. ב. 0.005755. **6.** ב. 770. ג. 3068. **7.** ב. $\frac{1}{10}$. **8.** ב. 11817. **9.** ב. $\frac{329}{480}$.

10. ב. $\frac{1}{380}$. **11.** ב. $n=19$. **12.** ב. $n=13$. **13.** ב. 2076. **14.** ב. 1679616.

15. ב. 0.00972. **16.** ב. -30. ג. 35. **17.** ב. $-\frac{391}{210}$. **18.** ב. 184. ג. 472.

19. ב. $p=8$. **20.** ב. $\frac{(2n-1)\cdot 3^n+1}{4}$. **21.** א. $a=1$, $b=2$. **22.** א. $A=6$, $B=5$.

23. ב. $n=10$. **24.** ב. $\frac{5n(n+1)(2n+1)}{6}$. ג. 136.5. **25.** ב. $2n^2(n+1)^2$. ג. $\frac{63225}{343}$.

26. ב. $3\frac{3}{4}$. ג. $\frac{3}{16}$. ד. $\frac{3}{80}$. **27.** ב. $\frac{1}{4}\cdot 3^n\left[(6n-5)\cdot 3^n+5\right]$.

28. ב. $\frac{n(2n+1)(4n+1)}{3}$. ג. $\frac{n(2n+1)(7n+1)}{6}$. **29.** ב. 46.

אינדוקציות – שאלות לחזרה

.30 א. הוכח באינדוקציה שעבור כל n טבעי מתקיים:

$$1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot5+3\cdot4\cdot7+\ \dots\ +n(n+1)(2n+1)=\frac{(n+1)^4-(n+1)^2}{2}$$

ב. נתון שסכום הטור הוא 14196. מהו האיבר האחרון בטור?

.31 א. הוכח באינדוקציה שעבור כל n טבעי מתקיים:

$$1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+\ \dots\ +n(n+1)(n+2)=\frac{(n^2+3n)(n^2+3n+2)}{4}$$

ב. מצא את n, אם נתון: $2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+\ \dots\ +n(n+1)(n+2)=1974$

.32 א. הוכח באינדוקציה שעבור כל n טבעי מתקיים:

$$\frac{3}{1\cdot2}-\frac{5}{2\cdot3}+\frac{7}{3\cdot4}-\frac{9}{4\cdot5}+\ \dots\ +\frac{(-1)^{n+1}(2n+1)}{n(n+1)}=1+\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$$

ב. חשב את הסכום: $-\frac{13}{42}+\frac{15}{56}-\frac{17}{72}+\ \dots\ +\frac{35}{306}$

ג. מצא את האיבר האחרון בטור שמשמאל, אם סכום הטור הוא $\frac{18}{19}$.

.33 א. הוכח באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\ \dots\ +n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

ב. a ו- b הם מספרים טבעיים. נתון: $a>b>1$. הוכח כי מתקיים:

$$b(b+1)+(b+1)(b+2)+\ \dots\ +a(a+1)=\frac{a^3+3a^2+2a-b^3+b}{3}$$

.34 א. הוכח בעזרת אינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{1}{2\cdot4}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{4\cdot6}+\ \dots\ +\frac{1}{(n+3)(n+5)}=\frac{5}{12}-\frac{2n+9}{2(n+4)(n+5)}$$

ב. מצא את k אם נתון: $\frac{1}{2\cdot4}+\frac{1}{3\cdot5}+\ \dots\ +\frac{1}{k(k+2)}=\frac{57}{154}$

35. א. הוכח באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{1}{3\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 11}+\ \dots\ +\frac{1}{(4n-1)(4n+3)}=\frac{n}{3(4n+3)}$$

ב. t הוא מספר טבעי. מצא אותו אם נתון:

$$\frac{1}{(4t-1)(4t+3)}+\ \dots\ +\frac{1}{39\cdot 43}=\frac{7}{645}$$

36. א. הוכח באינדוקציה (או בדרך אחרת) כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\ \dots\ +(2n)^2=\frac{n(2n+1)(4n+1)}{3}$$

ב. הבע באמצעות n את הסכום: $(2\cdot 3)^2+(2\cdot 4)^2+\ \dots\ (2\cdot 2n)^2$

37. א. הוכח באינדוקציה שלכל n טבעי: $1^3+2^3+3^3+\ \dots\ +n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

ב. היעזר בסעיף א' ומצא נוסחה לסכום: $2^3+4^3+6^3+\ \dots\ +(2n)^3$

ג. היעזר בסעיף א' ומצא נוסחה לסכום: $1^3+2^3+3^3+\ \dots\ +(2n)^3$

ד. היעזר בסעיפים ב' ו-ג' ומצא נוסחה לסכום: $1^3+3^3+5^3+\dots\ +(2n-1)^3$

38. א. הוכח באינדוקציה שלכל n טבעי: $1^2+2^2+3^2+\ \dots\ +n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

ב. הבע באמצעות n את הסכום: $2^2+4^2+6^2+8^2+\ \dots\ +(2n)^2$

ג. היעזר בסעיפים הקודמים ומצא נוסחה ל- $1^2+3^2+5^2+\dots\ +(2n-1)^2$

39. נתון הטור: $\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ \dots\ +\frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

נסמן ב- S_n את סכום n איברי הטור הראשונים.
להלן רשומות שלוש נוסחאות ל- S_n:

(1) $S_n=\frac{n+1}{4n+8}$ (2) $S_n=\frac{n}{2n+4}$ (3) $S_n=\frac{n^2+12n+2}{30(n+2)}$

הראו כי שתיים מבין שלוש הנוסחאות הללו אינן מייצגות את סכום n איברי הטור הראשונים, והוכיחו באינדוקציה כי הנוסחה שנותרה ל- S_n אכן מייצגת את סכום n איברי הטור הראשונים.

40. א. הוכח שלכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{(2-p)1!}{p}+\frac{(3-p)2!}{p^2}+\frac{(4-p)3!}{p^3}+\ \dots\ +\frac{(n+1-p)n!}{p^n}=\frac{(n+1)!}{p^n}-1$$

ב. חשב בעזרת סעיף א' את הסכום: $\frac{0.5\cdot 1!}{1.5}+\frac{1.5\cdot 2!}{1.5^2}+\frac{2.5\cdot 3!}{1.5^3}+\ \dots\ +\frac{9.5\cdot 10!}{1.5^{10}}$

תשובות:

30. **ב.** 4914. **31.** **ב.** 8. **32.** **ב.** $-\frac{1}{9}$. **ג.** $-\frac{37}{342}$. **34.** **ב.** $k=20$.

35. **ב.** $t=4$. **36.** **ב.** $\frac{4n(2n+1)(4n+1)}{3}-20$.

37. **ב.** $2n^2(n+1)^2$. **ג.** $n^2(2n+1)^2$. **ד.** $n^2(2n^2-1)$.

38. **ב.** $\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$. **ג.** $\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$.

39. **(1)** ו-**(3)** אינן מייצגות. **40.** **ב.** $692{,}217.38$.