אוסף פתרונות לחוברת קדם אנליזה

גיא סידס

9 באוקטובר 2024

תוכן העניינים

התנהגות פונקציית פולינום בסביבת נקודות האפס שלה 3
סרטוט פולינום המוצג כמכפלת ביטויים ליניאריים 3
עמ 50 ש 15 3
עמ 61 ש37 4
הזזה אנכית 6
עמ' 68 ש10 6
מתיחה אנכית וכיווץ אנכי של גרף של פונקציה 7
עמ' 87 ש10 7
עמ 88 ש11 7
מתיחה או כיווץ המשלבים הזזה אנכית ו/או אופקית 8
עמ 91 ש17 8
עמ 91 ש18 8
שיקוף ביחס לציר ה-x 10
1. עמ 95 ש14 10
1. עמ 96 ש 18 10
עמ100 ש27 12
שיקוף ביחס לציר y 13
עמ 104 ש9 13

עמ 105 ש14 14
עמ105 .16 ד. 14
עמ 106 ש17 14
עמ 106 ש18 15
עמ 106 ש16 16
עמ 160 ש3 18
עמ161 ש5 18
סיכום טרנספורמציות מתגלגל 20
הטרנספורמציה $g\left(x\right)=\frac{1}{f(x)}$ 22

התנהגות פונקציית פולינום בסביבת נקודות האפס שלה

סרטוט פולינום המוצג כמכפלת ביטויים ליניאריים

1. **מציאת האיבר המוביל:** יש לשים לב לסימן האיבר המוביל, ולמעריך החזקה.
2. **סרטוט הפונקציה בקצוות:** יש לסרטט את קצות הפונקציה בקצה הימני והשמאלי של הגרף כאשר $x \to \pm\infty$
3. **סימון נקודות האפס:** נסמן את נקודות החיתוך עם ציר ה-x.
4. **שינויי סימן? לפי זוגיות המעריך:** יש לבדוק שינויי סימן בהתאם לזוגיות ריבוי השורש (זוגי אינו משנה סימן).
5. **מגלשה? זיהוי שיפוע תלול/אפס:** השיפוע תלול כאשר ריבוי השורש הוא 1, ושיפוע אפס כאשר הריבוי גדול מ-1.
6. **סרטוט הגרף הסופי:** יוצאים מאחד הקצוות שסימננו, עוברים דרך נקודות האפס בזווית המתאימה (שיפוע תלול או אפס), ומשנים סימן בהתאם לזוגיות/אי זוגיות המעריך (שורש מריבוי זוגי או אי זוגי).

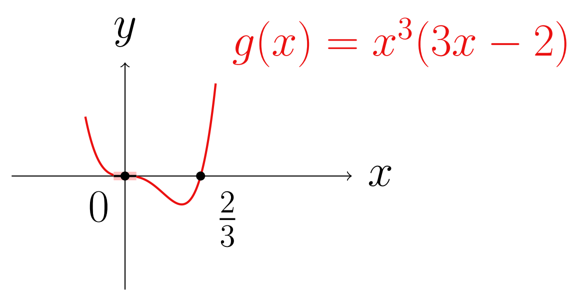
עמ 50 ש 15

הקושי הוא שמלכתחילה לכל 3 הפונקציות אותן נקודות 0, ובנוסף מעריכי החזקה של כל האיברים המוכפלים הם אי זוגיים. כך קורה שבכל אחת מנקודת האפס, הפונקציה משנה סימן (מחיוביות לשליליות או להיפך). בעצם, באמצעות הכלים של הבחנה בין שורשים, ו/או שינוי סימן, **לא ניתן לדעת איזה פונקציה מוצגת בגרף**.

הכלי האחרון שדווקא מתאים כאן, הוא "יש או אין מגלשה". ראינו שכאשר השורש נוצר ע"י כפל באיבר ליניארי (איבר בחזקה 1 כגון $(3x-2)$ או x, החיתוך של ציר ה-x הוא בשיפוע

תלול כלשהו, ולעומת זאת כאשר נקודת האפס (השורש) נוצרת ע"י איבר שהוא בחזקה גבוהה מ-1 כגון $(3x-2)^3$, השיפוע סביב נקודת החיתוך הוא 0.

כך ניתן להסיק שהגרף שבאיור הוא של הפונקציה:



עמ 61 ש37

יואב צודק. הפונקציה מוגדרת עבור $x=0$ ומחזירה ערך ששונה מ-0 וזו סתירה לאי-זוגיות.

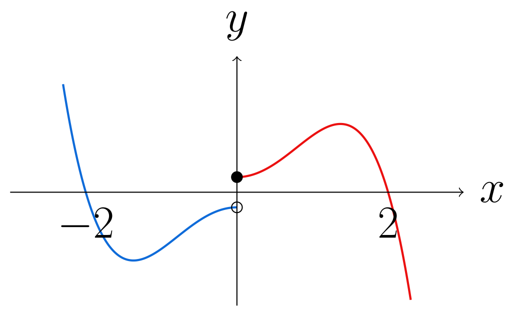
כלומר, יש כאן דוגמא מפריכה עבורה:

$$f(x)\neq -f(-x)$$

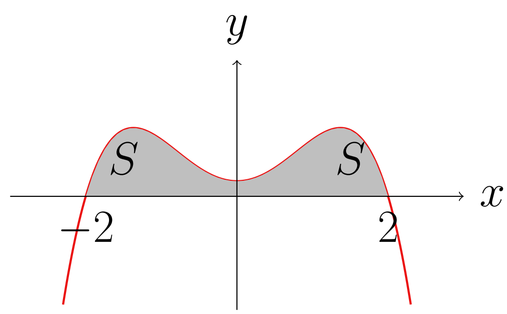
בפרט, $0<\underbrace{-f(-0)}_{-f(0)}\neq 0\underbrace{>}_{\text{נתון}}f(0)$

ניתן לקבוע באופן מוכלל שכדי שפונקציה תוכל להיות אי זוגית היא חייבת לקיים אחד משני תנאים חלופיים:

- או ש - $f(0)=0$ ואז לא קיימת הסתירה שלעיל,
- או שהפונקציה אינה מוגדרת עבור $x=0$ (כלומר תחום ההגדרה הוא $x\neq 0$ או מוכלל בתחום זה).



ב. כיוון ש- f זוגית בתחום $-3 \leqslant x \leqslant 3$ השטח המוגבל ברביע הראשון זהה לשטח המוגבל ברביע השני, מפני שערכי הפונקציה עבור ערך נגדי לכל ערך של x שנציב ברביע הראשון, הם זהים, אך ברביע השני. הפונקציה ברביע השני היא שיקוף ביחס לציר ה-y של הפונקציה ברביע הראשון. נשים לב שהשטח הוא שווה מפני שגבולות התחום תואמים. השטחים עליהם מדובר תחומים בקטעים $0 \leqslant x \leqslant 2$ ו- $-2 \leqslant x \leqslant 0$



הזזה אנכית

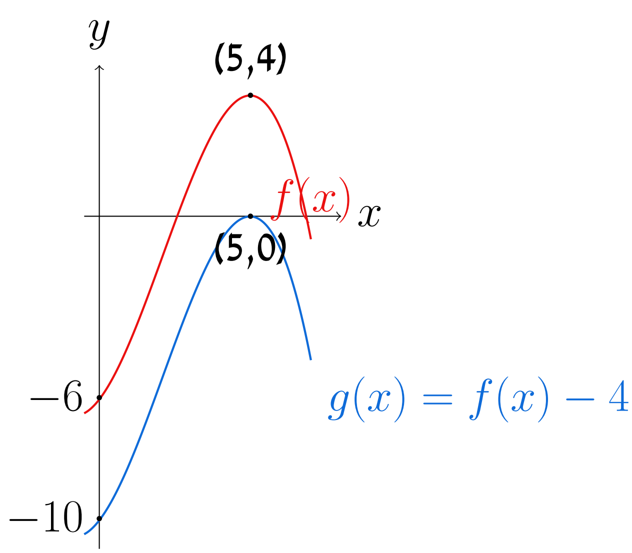
עמ' 68 ש10

נתון $(5,4) = max(f)$ וחיתוך ב-$(0,-6)$

א. g היא הזזה אנכית ב-4 כלפי מטה של f ולכן הקיצון יזוז בהתאם כלפי מטה, ל- $(5,0)$.

ב. גם חיתוך g עם ציר y זז ב-4 מטה ולכן $(0,-10)$.

ג. שרטוט:



ד.1. לא. הזזה אנכית לא משנה את שיעורי ה-x של נקודות קיצון.

ד.2. כן. הזזה אנכית מזיזה בהתאמה את שיעורי ה-y של נקודות הקיצון, וגם את שיעור ה-y של החיתוך עם ציר y.

ה.1. כדי ש-hתהא שלילית לכל x עלינו להבטיח שהערך המקסימלי קטן מ-0, ולכן יש להוריד את הפונקציה ביותר מ-4. ניתן לבחור כדוגמא את $\boxed{c=-5}$. יש אינסוף אפשרויות כאלו.

ה.2. באופן מוכלל נדרוש $\boxed{c<-4}$.

מתיחה אנכית וכיווץ אנכי של גרף של פונקציה

עמ' 87 ש10

מהנתון נובע $g(2) = 2.5f\left(2\right)$

ראשית צריך לשים לב ש- g נמצאת מעל f.

מא' מקבלים גם את ההפרש בין שתי הפונקציות כלומר,

$$\overbrace{g\left(2\right)}^{y_A} - \overbrace{f\left(2\right)}^{y_B} = 3$$

$$\overbrace{2.5f\left(2\right)}^{g(2)} - f\left(2\right) = 3$$

$$1.5f\left(2\right) = 3 / \div 1.5$$

$$f\left(2\right) = 2 \rightarrow g\left(2\right) = 2.5 \cdot 2 = 5$$

קיבלנו $\boxed{A\left(2,5\right), B\left(2,2\right)}$ ואכן המרחק בינהן הוא 3.

$$g\left(x\right) = 2.5f\left(x\right) \wedge f\left(x\right) = 2h\left(x\right)$$

$$g\left(x\right) = 2.5 \cdot \underbrace{2h\left(x\right)}_{\text{הצבה}} = \boxed{5h\left(x\right)}$$

עמ 88 ש11

נתון שרטוט של פונקציה f וצריך ליצור באמצעותה את g

מתיחה או כיווץ המשלבים הזזה אנכית ו/או אופקית

עמ 91 ש17

א. ראשית יש לבצע את המתיחה $2\times$ ונקודת הקיצון הזמנית המתקבלת היא $(6,16)$. לאחר הזזה אנכית -5 נקבל $\boxed{max:\ (6,11)}$

ב. מהנתון:

$$10=h\left(x\right)=2f\left(x\right)-5/+5$$
$$15=2f\left(x\right)/\div 2$$
$$\boxed{f\left(x\right)=7.5}$$

עמ 91 ש18

נתון $f\left(3\right)=-4$

אם הקיצון של f הוא $(3,-4)$, ומזיזים את f ימינה ב- 1 (זה המשמעות של $f\left(x-1\right)$ אז גם הקיצון הזה ימינה ל- $(4,-4)$

א. נתון $h\left(x\right)=\underbrace{4f\left(\overbrace{x}^{x=4}-1\right)}_{-4}$ ומחפשים את נקודת הקיצון שלה.

$h\left(x\right)|_{x=4}=4\cdot\underbrace{f\left(3\right)}_{f(4-1)=-4}=4\cdot(-4)=-16$ שיעור ה-x של נקודת הקיצון זז ימינה יחד עם הפונקציה ב-1, ולכן הוא x, ערך הקיצון -4 מוכפל ב–4 בעקבות המתיחה האנכית, ומתקבל $\boxed{min\left(4,-16\right)}$.

ב. $24=\underbrace{h\left(6\right)}_{h(x)|_{x=6}}=4\cdot f\left(x-1\right)=4\cdot\underbrace{f\left(6-1\right)}_{f(5)}$

$$24=h\left(6\right)=4\cdot f\left(5\right)/\div 4$$

$f(5)=6$

ג. מסעיפים קודמים אנחנו יודעים שהקיצון יתקבל עבור $x=4$ מפני שהמתיחה האנכית וההזזה האנכית לא ישפיעו על שיעור ה-x. לכן ניתן לרשום ולחשב עבור $x=4$ את הנתון כך:

$-11=j(4)=k\cdot \underbrace{f\left(\underset{x}{\overset{\Downarrow}{4}}-1\right)}_{-4}-3$, מתקבל

$$-11=\overbrace{-4}^{f(x)}k-3$$
$$-8=-4k$$
$$k=2$$

שיקוף ביחס לציר ה-x

1. עמ 95 ש14

א. הזזה שמאלה ב-3 ולכן $(-7,6)$

ב. שיקוף ביחס לציר ה-x ולכן שיעור ה-y מתהפך ומתקבלת $(-7,-6)$

ג.1. הזזה מעלה ב-7 של הפונקציה מסעיף ב' ולכן $(-7,1)$

ג.2. אין חשיבות לסדר המחוברים (חוק החילוף בחיבור / קומוטטיביות של חיבור). לכן הפונקציות זהות.

ד. דומה לג.1 רק שהפעם יש פרמטר k במקום המספר 7. כיוון שבפונקציה ג'1 הערך 7 מוביל לערך מינימום של 1, דרושה הזזה כלפי מטה ב-1 של הפונקציה מסעיף ג'1. מכאן שמקום 7, ערכו של k חייב להיות 6.

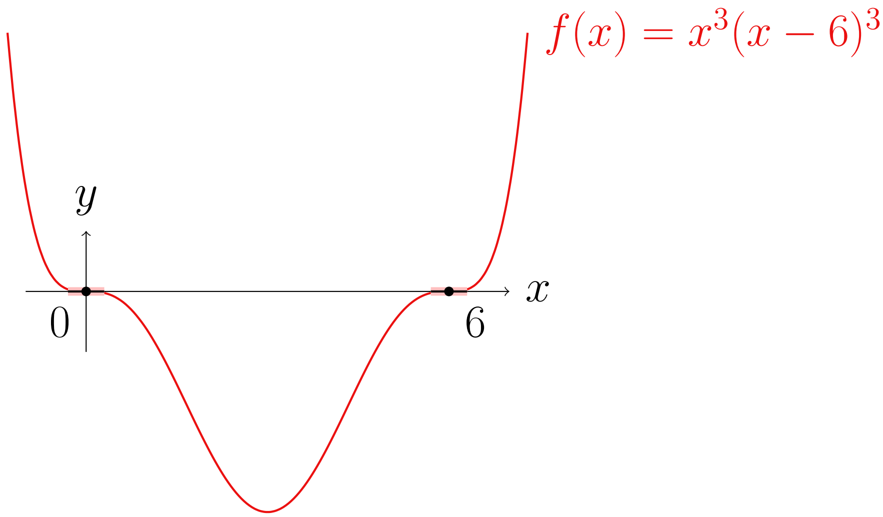
1. עמ 96 ש 18

א. $f(x)=0=\underset{x=0}{\underset{\Downarrow}{x^3}}\underset{x=6}{\underset{\Downarrow}{(x-6)^3}}$ (אין צורך לפרט מעבר לזה. ברגע שמנסים לאפס מספר גורמים שכופלים זה את זה, התאפסות של כל אחד מהם תאפס את הפונקציה.

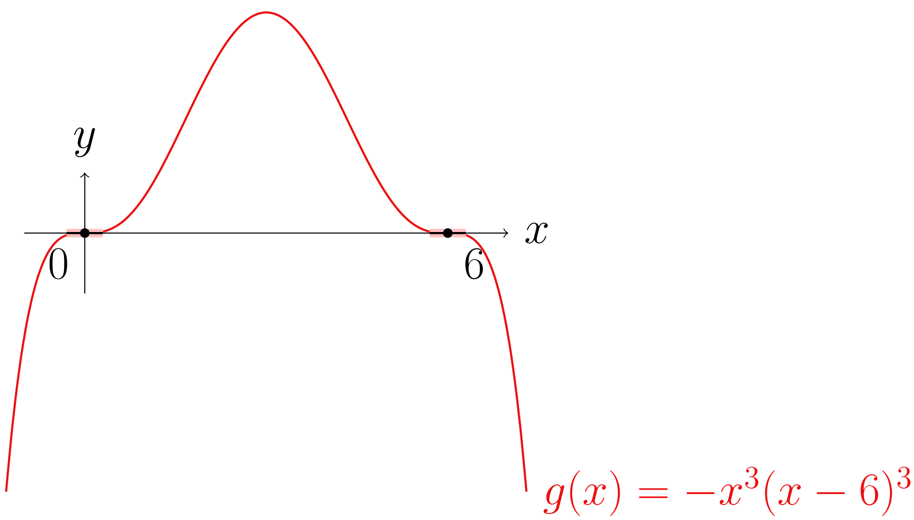
ב. יש לזהות את האיבר המוביל x^6 לאחר שזיהינו אותו ברור שהפונקציה היא עקומה הדומה באינסוף לפרבולה מחייכת.

נותר להבין כיצד נראית הפונקציה בנקודות החיתוך עם ציר ה-x. כאן, בכל אחד מהחיתוכים יהיה שינוי סימן, בגלל המעריכים השווים ל-3 (אי זוגיים), ולכן בין שני החיתוכים הפונקציה תרד מתחת ל-0.

הנקודה החשובה האחרונה היא הבנה שכיוון שהמעריכים גדולים מ-1, בשני החיתוכים מתקבלת "מגלשה" כלומר הפונקציה תשיק לציר ה-x בנקודות החיתוך. כתוצאה מכך מתקבלת הסקיצה הבאה:



ג. הפונקציה g היא שיקוף ביחס לציר ה-x של f ולכן כל הערכים שהפונקציה מחזירה הופכים סימן, והקיצון $(3,-729)$ מינימום הופכת ל- $\boxed{max\,(3,729)}$ מקסימום. לא נדרש בשאלה, אך הפונקציה g נראית כך:



ד.1. הפונקציה $h\,(x)$ היא הזזה אנכית של f בגודל $k-27$ לכן נקודת המינימום של h היא $(3,-729-27+k)$

ומתקבל $\boxed{(3,k-756)}$

ד.2. כדי שגרף הפונקציה יהיה מעל הישר $y=2$ יש לבחור $k-756>2$ ובסה"כ: $\boxed{k>758}$

עמ100 ש27

א. נקודה המינימום לפי $\frac{-b}{2a}$ היא $\boxed{(-2,2)}$.

ב. במילים: מתחנו פי 2, אבל בשינוי סימן. במילים אחרות ה-מינוס הוא שיקוף ביחס לציר x- והכפל ב-2 הוא מתיחה. זה נותן קיצון זמני של $(-2,-4)$מקסימום, (הערך 2 של הקיצון נכפל ב--2-). לבסוף יש הזזה אנכית, 5 למטה, ומתקבלת $\boxed{(-2,-9)}$ מקסימום.

ג1. ראשית ניקח את $(-2,2)$ יש **הזזה שמאלה** ב-3, ומתקבל $(-5,2)$, בהמשך כיווץ ושינוי סימן (**או שיקוף ביחס לציר** x **וכיווץ**), ה- 2 מוכפל ב-$-\frac{1}{2}$ ומתקבל זמנית $(-5,-1)$מקס'. ולבסוף הזזה אנכית 6 למעלה ומתקבל $\boxed{(-5,5)}$.

ג2. הגישה של להזיז את הנקודה $(0,6)$ (נק' החיתוך של f עם ציר y) לא תעזור, כי אחרי הזזה שמאלה ב-3, היא כבר לא תהיה על הציר!!!

ניתן לחשוב צעד אחד קדימה, כלומר לחפש את $f(3)$ דווקא (להתכונן מראש להזזה האופקית). חייב לומר שזה טריקי (ולפחות אני נפלתי בפח).

$f(3)=3^2+4\cdot3+6=27$, כעת ניקח את $(3,27)$ ונזיז שמאלה ל-$(0,27)$ (אנו נמצאים כעת כרצוי, על ציר y). כעת נכפול ב- $-\frac{1}{2}$ ונקבל $(0,-13.5)$ ולבסוף לאחר העלאה ב-6 ומתקבל $\boxed{(0,-7.5)}$ חיתוך עם y. זה לא הכי פשוט. נא להמשיך לקרוא.

ג2. הפתרון הפשוט ביותר הוא להציב $h(0)$:

$$h(0)=-\frac{1}{2}f\left(\underbrace{0+3}_{x+3}\right)+6=-\frac{1}{2}\left(\underbrace{3^2+4\cdot3+6}_{f(3)}\right)+6=-7.5$$

שיקוף ביחס לציר y

עמ 104 ש9

א. שרטוט.

ב. $g\left(x\right)=f\left(-x\right)$ שיקוף ביחס לציר ה-y.

ג. g היא שיקוף של f ביחס לציר ה-y. הדרך לקבל זאת היא להפוך את סימני ה-x בפונקציה המקורית. כלומר,

$$g\left(x\right)=-\left(-x\right)^{3}+8$$
$$g\left(x\right)=x^{3}+8$$

ד. נחתוך את כל אחת מהפונקציות עם הישרים $x=4,\ x=-4$ (בעצם אני מציב את ה-x האלו ונקבל את ערכי y של הנקודות.

את ההצבה קל לבצע במחשבון ב-$menu9$ להקליד את 2 הפונקציות, להגדיר $Start=-4, End=4, Step=8$

$$f\left(-4\right)=72$$
$$g\left(-4\right)=-56$$
$$f\left(4\right)=-56$$
$$g\left(4\right)=72$$

ד1. $B\left(4,72\right), A\left(-4,72\right)$, והאורך $AB=8$ כרצוי.

ד1. $B\left(4,-56\right), A\left(-4,-56\right)$, והאורך $AB=8$ כרצוי.

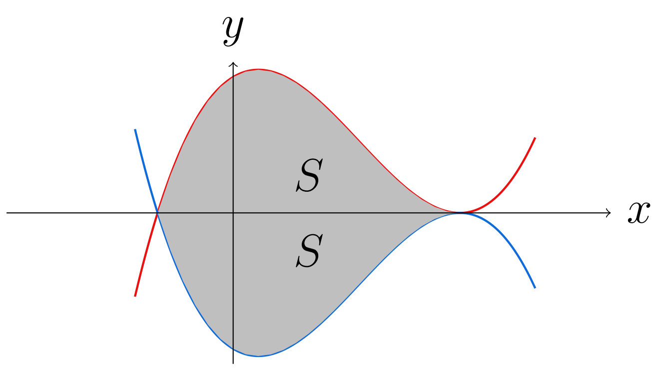
עמ 105 ש14

אחת הפונקציות היא שיקוף ביחס לציר x והאחרת שיקוף ביחס לציר y. רק צריך להחליט מי זה מי...

$g(x) = -f(x)$ היא שיקוף ביחס לציר ה-xשכן כל ערך שמוחזר ע"י f מקבל ערך זהה בסימן הפוך, בפונקציה g, ולכן זו תמונת מראה ביחס לציר x. זהו גרף 1.

$g(x) = f(-x)$ היא שיקוף ביחס לציר ה-y, בהפיכת הסימן של x לפני שהפונקציה f פועלת עליו, מתקבלת תמונה מראה ביחס לציר y. זהו גרף 2.

השטח המוגבל על ידי הגרפים של הפונצקיות f ו- g הוא $2S$. ראה סקיצה. השטח בין כל אחת מהפונקציות לבין ציר x הוא זהה ושווה ל- S ולכן בסה"כ השטח הוא $2S$.



עמ 105. 16. ד.

הפונקציה $f(-x-3)$ היא שיקוף ביחס לציר y של הפונצקיה מסעיף ג': $f(x-3)$ שלה נק' קיצון $(-1,7)$

לכן נקבל קיצון $(1,7)$.

חשוב לשים לב שאילו התבקשנו למצוא קיצון של $f(3-x)$ אז ביחס ל- $f(x-3)$ מדובר גם בשיקוף ביחס ל-y וגם בהזזה שמאלה ומתקבל $(-7,7)$.

עמ 106 ש17

נתונה $(3,2)$ נק' מקסימום של $f\left(x\right)$.

א. הקיצון של $f\left(-x\right)$ הוא $(-3,2)$ מקסימום (שיקוף ביחס לציר y).

ב. הקיצון של $-f\left(-x\right)$ הוא שיקוף אנכי של סעיף א' ולכן $(-3,-2)$ **מינימום**.

ג. $-f\left(-x\right)+2$ הזזה מעלה ב-2 של הפונקציה מסעיף **ב'** ולכן $(-3,0)$ מינימום.

ד. $8-f\left(-x\right)$ היא הזזה מעלה ב-8 של הפונקציה מסעיף ב' ולכן $(-3,6)$ מינימום.

ה. נתונה h המקיימת $h\left(x\right)=f\left(x+7\right)$ היא הזזה שאלה ב-7 ולכן $(-4,2)$ **מקסימום**.

ו. נתונה h המקיימת $h\left(-x\right)=f\left(-x+7\right)$.

זהו שיקוף ביחס לציר y של סעיף ה' ולכן $(4,2)$ מקסימום.

ז. $f\left(7-x\right)=f\left(-x+7\right)$ ולכן הקיצון $(4,2)$מקס.

עמ 106 ש18

נתונה $(3,-7)$ קיצון מינימום של $f\left(x\right)$

א. ניתוח הקיצון של $f\left(-x+9\right)$: הניתוח הוא לפי סדר פעולות חשבון. הפעולה הראשונה בסוגריים היא פעולת כפל של x ב--1. פעולה זו יוצרת שיקוף ביחס לציר y והופכת את נקודת הקיצון (בשלב ביניים) להיות $(-3,-7)$. לאחר מכן, התוספת $+9$ היא הזזה אופקית שמאלה ב-9, והקיצון לפיכך $\boxed{(-12,-7)}$.

ב. באופן דומה, הקיצון של $f\left(-x-6\right)$ משוקף תחילה ביחס לציר y ומתקבל $(-3,-7)$.
לאחר מכן, ההזזה ימינה ב-
6 מובילה לקיצון $\boxed{(3,-7)}$.

ג. את הקיצון של $-f\left(-x-6\right)$ עדיף לקבל מטרספורמציה על הקיצון של סעיף ב'. זו אותה הפונקציה בתוספת שיקוף ביחס לציר ה-x, ולכן נובע שהקיצון הוא $\boxed{(3,7)}$ (רק ערך ה-y משתנה).

בעוד נקודות הקיצון בסעיפים, א', ב', ג' הן עדיין נקודות מינימום, **הקיצון ב-ג' הוא מקסימום**.

השיקוף ביחס לציר x הופך את כל הקימורים של הפונקציה.

עמ 106 ש16

נתונה קיצון $(-4,7)$ מינימום.

א. שיקוף ביחס לציר y ולכן $(4,7)$ מינימום.

ב. הזזה אנכית של סעיף א' ולכן $(4,11)$ מינימום.

ג. h היא הזזה אופקית של f ולכן $(-1,7)$ מינימום.

ד. $h(-x)$ היא שיקוף ביחס לציר y **של הפונקציה מסעיף ג'** ולכן $(1,7)$ מינימום.

עמ 160 ש1

נתונות 3 פונקציות ויש למצוא לאיזו מהן יש שני ערכי x בהן היא לא מוגדרת ואסימפטוטה אנכית אחת.

הפונקציה $h\left(x\right)=\frac{x(x-3)}{(x-3)^2(x+3)}$ אינה מוגדרת עבור $x=3$ ועבור $x=-3$.

(ת"ה $x>3 \quad \vee \quad -3<x<3 \quad \vee \quad x<-3$)

ב-$x=-3$ יש אס' אנכית (מכנה מתאפס ומונה לא).

ב- $x=3$ לעומת זאת, גם המכנה וגם המונה מתאפסים, ולכן נבדוק עם טבלת ערכים :

x	$f\left(x\right)$
2.9	-4.9
2.99	-49.9
2.999	-499.9
3.001	500
3.1	5

ניתן לראות שיש אסימפטוטה אנכית. במקרה של הפונקציה הנתונה, ניתן היה לנתח זאת גם מסדר גידול / קיטון של פונקציות. המכנה פה מתאפס יותר מהר מהמונה, מפני שהוא בחזקה גבוהה יותר.

יוצא שיש 2 אסימפטוטות ולכן היא לא מתאימה.

הפונקציה $g\left(x\right)=\frac{x^2}{(x-3)(x+3)}$ גם היא אינה מוגדרת באותן הנקודות, בשתי הנקודות אסימפטוטה אנכית (מכנה מתאפס ומונה לא).

הפונקציה $f\left(x\right)=\frac{(x-3)^2}{(x-3)(x+3)}$ גם היא אינה מוגדרת באותן הנקודות.

כאן נציב בטבלה

x	$f(x)$
2.999	-0.00001
3.000001	0.00000016

עמ 160 ש3

$f(x) = \frac{x^2+12x+32}{x^2+9x+20}$ ת"ה

$-5 \neq x \neq -4$

$\boxed{x < -5 \quad \vee \quad -5 < x < -4 \quad \vee x > -4}$

נבדוק אם המונה מתאפס בנקודות בהן הפונקציה לא מוגדרת:

$f(x) = 0 \rightarrow x^2 + 12x + 32 = 0 \rightarrow x_1 = -4, x_2 = -8$ והנה ב-$x = -4$ הוא מתאפס.

בעצם ניתן לרשום את הפונקציה ככה:

$$f(x) = \frac{\cancel{(x+4)}(x+8)}{\cancel{(x+4)}(x+5)}$$

ניתן לצמצם כי $x + 4 \neq 0$ בת"ה...

ב. מכאן אני חוקר את המפושטת, וקל לראות אס' אנכית ב- $x = -5$ מכנה מתאפס ומונה לא.

ג1 כדי למצוא את A נציב $f(-4) = \frac{-4+8}{-4+5} = \frac{4}{1} = 4$

$A(-4, 4)$

1. ג2) **לסיים לפתור...**

עמ161 ש5

נתונות $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = x + \frac{1}{x}$ ונגדיר $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

א. ת"ה של h דורש שנקיים שני תנאים: $g(x)$ מוגדרת $\wedge$ $g(x) \neq 0$

ת"ה $g(x)$ $x \neq 0$

$$g(x) \neq \boxed{0 \neq x + \frac{1}{x}} \to \frac{x^2+1}{x} \neq 0$$

מתקיים לכל x בת"ה של $g(x)$ כי x^2 אי שלילי. ולכן סה"כ ת"ה של h הוא $x \neq 0$

ב. צריך להראות שבת"ה $h(x) = x$

$g(x) = x + \frac{1}{x} = \frac{x^2+1}{x}$ ומכאן ש:

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{x^2+1}{\frac{x^2+1}{x}} \\ &= \cancel{\left(x^2+1\right)} \frac{x}{\cancel{x^2+1}} \\ &= x \end{aligned}$$

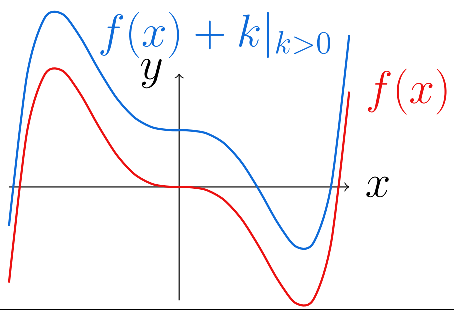
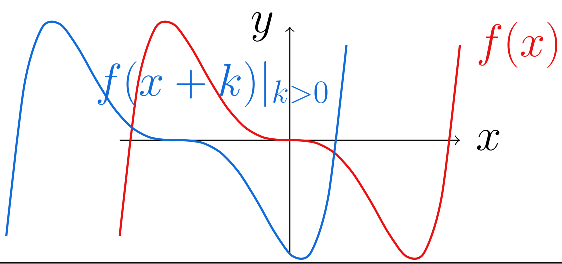
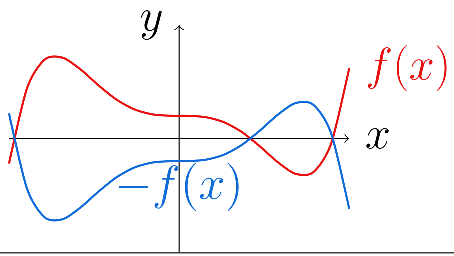
כרצוי.

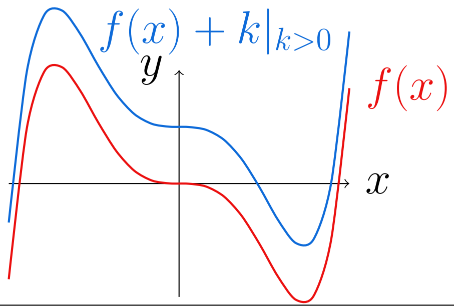
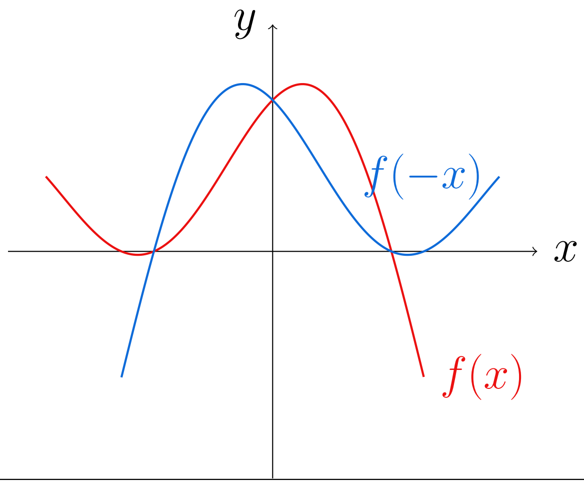
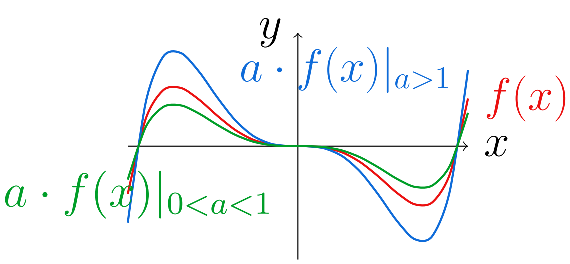
אסור לרשום כך (רישום שוויון **שעדיין לא הוכח**, ואז פתרון משוואה):

$$x = \frac{x^2+1}{\frac{x^2+1}{x}}$$

המשך פתרון

סיכום טרנספורמציות מתגלגל

ביטוי אלגברי +שם	השפעה על נקודה מוכללת	הסבר מילולי	שרטוט
$f(x)+k$ הזזה אנכית	$(x,y)\rightarrow$ $(x,y+k)$	הפונקציה תזוז: $k>0\rightarrow$למעלה $k<0\rightarrow$למטה	
$f(x+k)$ הזזה אופקית	$(x,y)\rightarrow$ $(x-k,y)$	הפונקציה תזוז: $k>0\rightarrow$שמאלה $k<0\rightarrow$ימינה	
$-f(x)$ שיקוף ביחס לציר x	$(x,y)\rightarrow(x,-y)$	ערכי ה-y יתהפכו מחיוביים לשליליים ולהיפך.	

ביטוי אלגברי +שם	השפעה על נקודה מוכללת	הסבר מילולי	שרטוט
$f\left(x\right)+k$ הזזה אנכית	$(x, y) \rightarrow$ $(x, y+k)$	הפונקציה תזוז: $k>0 \rightarrow$למעלה $k<0 \rightarrow$למטה	
$f\left(-x\right)$ שיקוף ביחס לציר y	$(x, y) \rightarrow (-x, y)$	ערכי ה-x יתהפכו מחיוביים לשליליים ולהיפך. גם תחום ההגדרה מתהפך.	
$a \cdot f\left(x\right)$ מתיחה/כיווץ אנכי	$(x, y) \rightarrow (x, a \cdot y)$	ערכי ה-y ישתנו: • יגדלו $a>1$ • יקטנו $0<a<1$	

הטרנספורמציה $g\left(x\right)=\frac{1}{f(x)}$

מומלץ לנתח טרנספורמציות שפועלות על הערך המוחזר מפונקציה (כלומר על שיעור ה-y) תוך התייחסות לישרים $y=1,y=-1$ מפני שמפגש של f עם הישרים הנ"ל יכול לשמש נקודת עוגן (נקודת ייחוס נוחה) להבנת התנהגות הפונקציה g. זאת מפני שמנת החלוקות $\frac{1}{1}=1,\frac{1}{-1}=-1$ וכתוצאה מכך נקודות החיתוך הנ"ל הן גם נקודות חיתוך בין g ל- f.

מכאן יש להמשיך את הניתוח תוך התייחסות לכך ש(עבור ערכים חיובים) חלוקה במספר הגדול מ-1 מקטינה, חלוקה במספר שבין 0 ל- 1 מגדילה, חלוקה במספר השואף ל-0היא מספר השואף ל-∞ וחלוקה במספר השואף ל- 0 היא מספר השואף ל- ∞.

הקשרים הבאים מתקיימים בין f ל- g:

(מומלץ לא לשנן קשרים, אלא את האלגוריתם לשרטוט g מתוך f)

1. כאשר f חיובית g חיובית, וכאשר f שלילית, g שלילית.
2. נקודות חיתוך של fהופכות לאסימפטוטות אנכיות ב-g.
3. חורים ב-$(x,0)$ ב- f הופכים לאסימפטוטות אנכיות ב-g.
4. תחומי עליה וירידה מהתפכים (כלומר - עליה ב-f הופכת לירידה ב-g ולהפך), כל עוד אין חיתוך של ציר x.
5. בהתאם, מינימום הופך למקסימום ולהפך, כל עוד ערך הקיצון אינו 0.
6. שיעור ה-x של נקודות הקיצון ב-f נשאר ללא שינוי ב-g, ערך ה-y משתנה לאחד חלקי הערך הקיים.

7. אם ל- f אין אסימפטוטה אופקית, אז ל-g יש אופקית $y=0$

8. אם ל- f יש אסימפטוטה אופקית $y=0$, אז ל-g אין.

9. אם ל- f יש אסימפטוטה אופקית $y=a_{|a\neq 0}$, אז ל-g יש אס' אופקית $y=\frac{1}{a}$

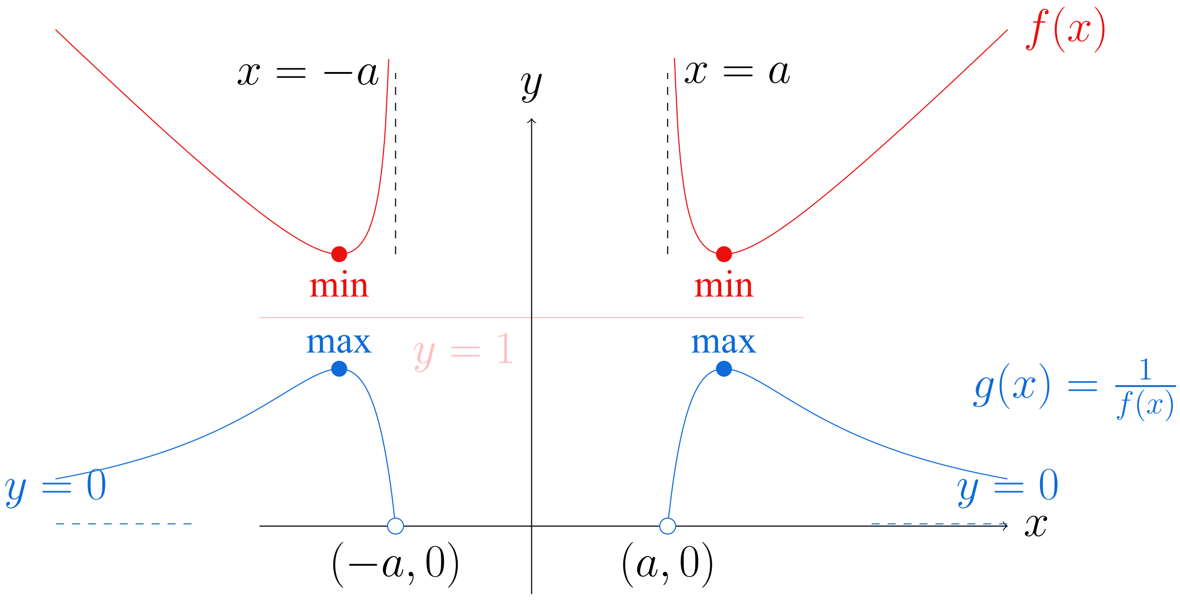
10. אם ל- f יש אסימפטוטה אנכית $x=m$ עבור m כלשהו, אז יש ב-g חור ב- $(m,0)$.

11. אם ל- f יש חור ב-$(x,y)_{|y\neq 0}$ אז ל-g חור ב- $\left(x,\frac{1}{y}\right)$

12. תחום ההגדרה של g מוכל בתחום ההגדרה של f. כלומר, בנקודה בה f אינה מוגדרת בהכרח g אינה מוגדרת, אך יתכנו נקודות בהן g מוגדרת ו-fאינה מוגדרת.

בדוגמא שלהלן:

- $min\left(f\left(x\right)\right)>1$ ולכן $max(g(x))<1$ והפונקציות אינן נחתכות,
- כיוון שאין חיתוך עם ציר x, מתקיים (בנוסף ל- $g\left(x\right)=\frac{1}{f(x)}$) גם $f\left(x\right)=\frac{1}{g(x)}$.



$f(x)$
$x = -a$
$x = a$
y
min
min
max
max
$y = 1$
$g(x) = \frac{1}{f(x)}$
$y = 0$
$y = 0$
x
$(-a, 0)$
$(a, 0)$