אִינְדּוּקְצִיָּה מתמטית

גיא סידס

21 במרץ 2025

מבוא ודוגמאות

אינדוקציה מתמטית היא שיטת הוכחה המשמשת להוכחת טענות עבור כל המספרים הטבעיים. הרעיון הוא לבדוק את נכונות הטענה עבור מקרה בסיסי ולראות שנכונותו עבור מספר כלשהו $n=k$ גוררת את נכונותו גם עבור $n=k+1$. זה דומה לשורה של אבני דומינו, שבה נפילה של האבן הראשונה תגרום לכל האבנים ליפול, **אם כל אחת מפילה את האבן הבאה אחריה**.

שלבי ההוכחה באינדוקציה

1. **בדיקה:** בודקים שהטענה נכונה עבור מספר טבעי התחלתי מסוים, לרוב $n=1$.
2. **הנחת האינדוקציה:** נניח שהטענה נכונה עבור $n=k$.
3. **שלב ההוכחה:** ($step$ / מעבר / צעד האינדוקציה) מוכיחים שהטענה נכונה גם עבור $n=k+1$, בהתבסס על ההנחה.

אם שלושת השלבים מתקיימים, ניתן להסיק שהטענה נכונה לכל n טבעי גדול או שווה למספר ההתחלתי.

דוגמה 1: סכום המספרים הטבעיים הראשונים

נוכיח את הנוסחה: $S_n = 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

שלב 1: **בדיקה** עבור $n=1$. $S=1$ והנוסחה נותנת גם כן $1 = \frac{1(1+1)}{2}$. לכן, הטענה נכונה עבור $n=1$.

שלב 2: **הנחת האינדוקציה: חייבים לרשום:**

"נניח שהטענה נכונה עבור $n=k$ (כנתון), ונוכיח נכונות עבור $n=k+1$ "

כלומר, (שלב 3א) **צ"ל:**

$$S_{k+1} = 1+2+3+\cdots+k+(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

שלב 3ב: **הוכחה:** (צעד האינדוקציה): נוכיח נכונות עבור $n=k+1$.

מציבים את מה שנתון לפי הנחת האינדוקציה, לתוך הסדרה במקום רשימת המחוברים 1 עד k.

$$S_{k+1} = 1+2+3+\cdots+k+(k+1)$$

$$S_{k+1} = \overbrace{\frac{k(k+1)}{2}}^{1+2+\cdots+k=\text{לפי הנחת האינדוקציה}} + (k+1) = \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} = \boxed{\frac{(k+1)(k+2)}{2}}$$ מ.ש.ל.

דוגמה 2: סכום המספרים האי-זוגיים הראשונים

נוכיח שהסכום של nהמספרים האי-זוגיים הראשונים שווה ל-n^2, כלומר $S_{n\text{אי זוגיים}} = n^2$
.

שלב 1 : בדיקה עבור $n = 1$. המספר האי-זוגי הראשון הוא 1, הסכום הוא 1 ולפי הנוסחה $n^2 = 1^2 = 1$,
ולכן הטענה נכונה עבור $n = 1$

שלב 2 : פשוט מצטטים : "נניח נכונות עבור $n = k$ ונוכיח עבור $n = k + 1$" (אין צורך לרשום זאת, אבל המשמעות היא שנתון : $S_{k\text{אי זוגיים}} = k^2$)

שלב 3א : **צ"ל** $S_{(k+1)\text{אי זוגיים}} = (k+1)^2$. (מומלץ, זה כדי לעשות לעצמכם סדר).

שלב 3ב : **הוכחה** : ראשית נבטא את סכום סדרת האי זוגיים כולל ביטוי מוכלל לאיבר ה- n :

$$S_{n\text{אי זוגיים}} = \underbrace{1}_{n=1} + \underbrace{\overbrace{3}^{2\cdot 2-1}}_{\text{האיבר השני}} + \underbrace{\overbrace{5}^{2\cdot 3-1}}_{\text{השלישי}} + \cdots + \underbrace{(2n-1)}_{n\text{האיבר ה-}}$$

נבטא את הסכום במקרה של $k+1$ אי זוגיים, ומיד לאחר מכן נחליף את רישום הסכום המקורי ב- k^2 שנתון לנו :

$$\begin{aligned} S_{(k+1)\text{אי זוגיים}} &= \underbrace{\overbrace{1 + 3 + \cdots + (2k-1)}^{k^2=\text{לפי הנחת האינדוקציה}}}_{S_{k\text{אי זוגיים}}} + \underbrace{\overbrace{(2(k+1)-1)}^{2k+1}}_{(k+1)\text{ האיבר ה-}} \\ &= \underbrace{k^2}_{\text{הצבת הנתון}} + \underbrace{(2k-1)}_{(k+1)\text{ האיבר ה-}} \end{aligned}$$

נחשב טרינום

$$S_{(k+1)\text{אי זוגיים}} = \boxed{(k+1)^2} \text{מ.ש.ל}$$

הגדרות ומיקוד

הגדרה קצת יותר פורמלית

אקסיומת האינדוקציה המתמטית: אם המספר 1 מקיים את התכונה, ומנכונותה עבור n טבעי נובעת גם נכונותה עבור $n+1$, אז כל המספרים הטבעיים מקיימים את התכונה.

מה במיקוד תשפ"ה (המיסתורין הגדול)

במיקוד - נושאים	במיקוד - עמודים	לא במיקוד
• נוסחאות בהן האיבר הראשון קבוע (והסדרה מוגדרת כך שכאשר n גדל ב- 1 נוסף לסדרה בדיוק איבר אחד). למשל, סכומים (לדוגמא ארכימדס עמ' 49), חזקות. • נוסחאות נסיגה • נוסחאות עם סימנים מתחלפים (למשל גורן 229) • כשלים באינדוקציות, (לדוגמא אלכס חייט תכנית ירושלים עמ' 117) • זיהוי הוכחות אינדוקטיביות (נכונות הוכחות) • עצרת - רק במקרה שלא מדובר בהוכחת מכפלות אלא בהוכחת סכומים.	**גורן**- מקרים בהם האיבר הראשון קבוע: 222-226 תרגילים 1-66 226 תרגילים 71- 71 227-228 תרגילים 88-96 עמודים 229-230 תרגילים 1-18 נוסחאות נסיגה: 244 תרגילים 1-6, 19-20 **ארכימדס** - כל הפרק, לא כולל: עמ' 55- ללא 1 עד 4 עמ' 63- ללא 1, 2, 3, 5 עמ' 64- ללא 7, 12 עמ' 66- ללא 21א כנראה גם לא כולל 42-52. **תכנית ירושלים** (חייט פרק 7) תרגול מומלץ: 109-111 תרגיל 1 סעיפים א-כו, ל-לד, תרגיל 6 סעיפים א, ג-ט 117 תרגיל 9 סעיפים ב,ג תרגיל 10 **יואל גבע** חוברת אינדוקציה	• נוסחאות בהן נוסף יותר מאיבר אחד כש-n גדל ב-1 (גורן 231) • הוכחת טענות המיוצגות באופן ויזואלי (לדוגמא, שאלה 1ב כאן) • אי שוויונות • תכונות התחלקות (כגון חייט תרגיל 113 (2,3), גורן 235 • הוכחות תכונות של סדרות • התלכדות סדרות • שקילות הצגות **שונות** של סדרות (כגון חייט 115 תר' 6) • איבר ראשון מתחלף (משתנה) • שילוב עם זהויות טריגונומטריות • מכפלות (למשל גורן 226 71-76