# בדיקת נגזרות אסימפטוטות וחורים בפונקציות

גיא סידס

5 באפריל 2025

# מבוא

במהלך יוד למדנו שאם מכנה מתאפס ומונה לא יש אימפטוטה אנכית. ואם גם המונה מתאפס? בודקים. ניתן לנסח כללים שונים כדי לחסוך את הבדיקה במקרים מסויימים, אך כללים אלו אינם מספיקים בכל המקרים.

## כללים (שלא תמיד מספיקים ולכן לא נשתמש בהם)

### אסימפטוטות אנכיות:

אם מכנה מתאפס ב-$x_0$ ומונה לא ← יש אס' אנכית, $x = x_0$

אם **שניהם מתאפסים** ← צריך **לבדוק במחשבון** (טבלת ערכים 9 $menu$ או $CALC$ב-$ES$991, אבל ניתן להגדיר כללים :

- אם החזקות שוות (בביטוי שמאפס מכנה) יהיה חור, וערך ה-$y$יהיה זה המתקבל מהצבת $x_0$בפונקציה לאחר צמצום הביטוי שמתאפס (מונה ומכנה),
- אם החזקה במכנה גדולה מזו שבמונה תהיה בכל זאת אס' אנכית,
- אם החזקה במונה יותר גדולה (בביטוי שמאפס מכנה), אז יהיה חור $(x_0\,,0)$.

### אסימפטוטות אופקיות:

- אם החזקה במכנה גדולה מבמונה, תהיה אסימפטוטה אופקית $y = 0$
- אם החזקה במונה גדולה מזו שבמכנה - אין אסימפטוטה אופקית.
- אם החזקות שוות - האסימפטוטה האופקית תהיה לפי יחס מקדמים, לדוגמא

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{-2x^2+7x-5}{3x^2+10x}\right)=-\frac{2}{3}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\text{אס' אופקית } \overset{x\to\pm\infty}{y=-\frac{2}{3}}}$$

## הטכניקה הנדרשת בדף זה, ובהמשך הדרך

יש למצוא **אסימפטוטות וחורים באופן אמפירי ע"י הצבת ערכים.**

רק עד גבול מסויים נוכל להיעזר בידע על סדרי גדילה (גדל יותר חזק / מתאפס יותר חזק).

## הבדיקה האמפירית

נבדוק באמצעות טבלת ערכי $x, f(x)$ בהם $x$ הולך ומתקרב לנקודה בה הפונקציה אינה מוגדרת, מימין ומשמאל לנקודה.

דוגמא: ניקח למשל את $\frac{x^3-x^2+x-1}{x-1}$ ונניח לשם הדוגמא שאיננו יודעים לנתח את מיקום החור (כאן יכולים):

1. הטבלה משמאל "מוכיחה" אמפירית (מוצאת) את מיקום החור $(1,2)$
   ובאמצעות טבלה כזו יש לענות בבחינות ובבגרות.

2. חשוב לבדוק מימין ומשמאל. הגבול של הפונקציה לא בהכרח קיים משני הצדדים, וגם אם קיים, ערכו לא בהכרח זהה. מצד אחד יכולה להיות אסימפטוטה אנכית ובצד שני חור.

3. למציאת **אסימפטוטות** ב- $\pm\infty$ נבצע הצבות של ערכי $x$ חיוביים הולכים וגדלים השואפים לאינסוף ושל ערכי $x$ שליליים הולכים וקטנים השואפים למינוס אינסוף. בהתאם לערכי הפונקציה שנקבל נדע אם קיימת אסימפטוטה אופקית.

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 0.99 | 1.9801 |
| 0.99999 | 1.99998 |
| 1.00001 | 2.00002 |
| 1.01 | 2.0201 |
| 2 | 5 |

# שאלות (כיתה ובית)

## א' $\frac{2x-2}{\sqrt{x^2-4x+3}}+1$

תלמיד ניתח את הפונקציה $\frac{2x-2}{\sqrt{x^2-4x+3}}+1$ הוא זיהה כי ב-$x=3$ אסימפטוטה אנכית וב-$x=1$ היתה התלבטות - גם המונה התאפס. לכן החליט שיש חור. ב-$(1,0)$. האם התלמיד צודק:

יש לקבוע לגבי כל אחת מהטענות: נכון/לא נכון (נמקו):

1. אם המכנה מתאפס וגם המונה, יש חור.
2. כשיש חור ערך ה-$y$ בנקודה הוא 0.
3. בהמשך השאלה התלמיד גזר את הפונקציה וקיבל (הנגזרת נכונה):

$$f'\left(x\right)=\frac{-2\left(x-1\right)}{\left(x^2-4x+3\right)^{1.5}}$$
$$0=-2\left(x-1\right)$$
$$0=x-1$$
$$x=1\text{חור}$$

4. ודאו שאתם מצליחים לבדוק נכונות נגזרת:

- ב-$ES$ באמצעות חישוב $\frac{d\boxed{f\left(x\right)}}{dx}|_{x=1.23}$ (רישום התוצאה במחברת), ולאחריו $CALC$ של הנגזרת עבור אותו $x=1.23$. בבחינה כל אחד אמור לבדוק על ערך $x$ שרירותי שונה כמובן.
- ב-$EX$יש לעבוד כפי שלימדתי ב-$menu9$ ולהישאר בתפריט עד סיום סעיפים 5,6.
- ב-$CW$ זהה כאן ל-$EX$ אך מקלידים את $f,g$ באמצעות כפתור $\boxed{f\left(x\right)}$ואז $\text{Define}f\left(x\right)$ . לאחר מכן ניגשים ל- $\text{Table}\rightarrow HOME$ ניתן לצאת מתפריט טבלה ולחזור אליו (הפונקציות נשמרות).

5. מצאו אסימפטוטות בנגזרת אם ישנן,
6. מצאו חורים בנגזרת אם ישנם.

## ב' $\frac{\sqrt{x^2}}{x+x^2}$

נתונה הפונקציה $f\left(x\right)=\frac{\sqrt{x^2}}{x+x^2}$
מצאו את

1. תחום ההגדרה,
2. האסימפטוטות המקבילות לצירים,
3. בדקו (באמצעות בדיקת נכונות נגזרת) איזו מהנגזרות הבאות נכונה:

$$\frac{x^3}{x^2\left(x+x^2\right)^2},\qquad \frac{-x^2}{\sqrt{x^2}\left(x+x^2\right)},\qquad \frac{-x^3}{\sqrt{x^2}\left(x+x^2\right)^2}$$

4. מצאו את החור, או חורים בפונקציה.

## ג'

נתונה הפונקציה $f\left(x\right)=\frac{2^{2x}-2^x}{2^{2x}-3\cdot 2^x+2}$ התלמיד לא למד לחקור פונקציה מעריכית, אך נתון (**שגוי**) כי הפונקציה מוגדרת לכל $x\neq 0$ (ב- $x=0$ המכנה מתאפס).
מצאו:

1. האם בבדיקת הצבה מתגלה ערך $x$ נוסף בו הפונקציה אינה מוגדרת?
2. את האסימפטוטות המקבילות לצירים,
3. את החורים בפונקציה.

## ד' $2^{\frac{1}{2x+1}}$

נתונה הפונקציה $f\left(x\right)=2^{\frac{1}{2x+1}}$ המוגדרת כאשר $x\neq -0.5$ (הפונקציה היא 2 בחזקה כל השבר).

1. מצאו אסימפטוטות מקבילות לצירים,
2. בדקו האם הנגזרת הנכונה היא

$$2^{\left(\frac{1}{2x+1}\right)}\frac{-2}{\left(2x+1\right)^2}\qquad \text{או} \qquad 2^{\left(\frac{1}{2x+1}\right)}ln\left(2\right)\frac{-2}{\left(2x+1\right)^2},$$

3. מבלי לצאת מ-$menu9$ מצאו חור/חורים (כולל ערך $y$ תקין) ואסימפטוטות.

## ה' $f\left(x\right)=\frac{x^{2}+x+a}{x^{2}+b}$

כאשר ידוע שיש לה אסימפטוטה אנכית אחת בלבד העוברת בנקודה $\left(-2,5\right)$

**תהליך הפתרון (לתרגול עצמי):**

1. רישום האסימפטוטה האנכית הנובעת מהנתון.
2. פירוק של המכנה והסקת ערכו של b מהאסימפטוטה האנכית הידועה.
3. הצבה של x שמצאנו שאמור לאפס גם את המונה, ומכאן פתרון של a.
4. צימצום וחישוב החור (לא בכל פונקציה ניתן לחשב. כאן כן).
5. אסימפטוטות אופקיות + חיתוך צירים.
6. גזירה, פישוט הנגזרת ובדיקת נגזרת.
7. קביעה שהנגזרת חיובית/שלילית לכל X או מציאת התאפסות אם יש כזו, וחשודות לקיצון.
8. סקיצה:

- רישום האסימפטוטות,
- רישום הנקודות השונות והחורים (לא לשכוח לסמן חור בעיגול חלול).
- חיבור בין הנקודות ומשיכת הקו לכיוון האסימפטוטות אמורה לייצר סקיצה
- בדיקת התאמה בין הסקיצה למחשבון ב-$9\ menu$ ב- $EX$ או $7\ mode$ ב-$ES$.

## ו' בג' 47/8 (חלקי עמ292)

נתונות 3 פונקציות שלכל אחת מהן שני ערכי $x$בהם היא אינה מוגדרת.

$$g\left(x\right)=\frac{x^{2}-1}{(x+1)(x+2)},\quad h\left(x\right)=\frac{x^{3}}{x(x+2)},\quad k\left(x\right)=\frac{x^{3}-1}{x(x+2)}$$

ידוע שלאחת מ-3 הפונקציות יש אסימפטוטה אופקית אחת ואסימפטוטה אנכית אחת בלבד.

1. מבין 3 הפונקציות קבעו איזו פונקציה מקיימת את כל התכונות האלו. נמקו.

עבור הפונקציה שבחרתם:

2. מצאו את משוואות האסימפטוטה האופקית והאנכית,
3. מצאו חורים אם יש,

4. מצאו שיעורי חיתוך צירים,
5. סרטטו סקיצה (נתון שאין קיצון).
6. המשך השאלה - בעיית קיצון. עוד נגיע אליה.

## ז' בג 45/7 (חלקי) עמ 272

נתונה הפונקציה $f\left(x\right)=\frac{2{(cosx)}^{2}+sin2x}{2cosx}$

(כך בשאלה. בכתיבה מקובלת אמורים לרשום : $f\left(x\right)=\frac{2cos^{2}x+sin(2x)}{2cosx}$)

בתחום $0\leqslant x\leqslant 2\pi$

א.1 מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$

א2. הסבירו מדוע לפונקציה $f(x)$ אין אסימפטוטות המאונכות לציר ה-$x$

א3. מצאו את נקודות החיתוך השל גרף הפונקציה $f\left(x\right)$ עם הצירים.

ב1. הראו כי לכל $x$ בתחום ההגדרה של הפונקציה $f\left(x\right)$ מתקיים $f\left(x\right)=cosx+sinx$

ב1ב. בדקו ללא גזירה האם הנגזרת הנכונה היא $sinx-cosx$, או $sinx-cosx$, או $-sinx-cosx$, או $cosx-sinx$

ב2. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון.

ג.1 סרטטו סקיצה של $f$.

(ג2, סעיף חשיבה, ד' שטח).