מספרים מרוכבים

גיא סידס

21 באוגוסט 2024

תוכן העניינים

היסטוריה, וכפל מרוכבים

המספרים המרוכבים הוצעו לראשונה כפיקציה במאה ה-16 ככלי לפתרון משוואה ממעלה שלילית. ניתן להציג שאלה פשוטה שפתרונותיה מרוכבים: מצאו שני מספרים שמכפלתם 50 וסכומם 10. זוהי דוגמא קלאסית שהוצגה באותה עת. המשוואות המתקבלות:

$$
\begin{aligned}
x + z &= 10 \\
z \cdot x &= 50 \\
z\,(10 - z) &= 50 \\
-z^2 + 10z - 50 &= 0 \text{ מתקבלת משוואה ריבועית} \\
z_{1,2} &= \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot 50}}{-2} \\
z_{1,2} &= \frac{-10 \pm \sqrt{-100}}{-2} \\
z_{1,2} &= \frac{-10 \pm \sqrt{100}\sqrt{-1}}{-2} \\
z_{1,2} &= 5 \pm 5\sqrt{-1}
\end{aligned}
$$

כדי להתקדם נקבע הסימון $\boxed{i^2 = -1}$ או $i = \sqrt{-1}$ ונקבע כי במרוכבים, שורש של מספר שלילי **מוגדר**.

$$
\begin{aligned}
z_{1,2} = 5 \pm 5\sqrt{-1} \rightarrow z_1 &= 5 + 5i \\
z_2 &= 5 - 5i
\end{aligned}
$$

מרוכבים יסומנו לרוב באותיות z או w. ניתן לראות כי סכום שני השורשים הוא 10:

$5 \cancel{+5i} + 5 \cancel{-5i} = 10$

וניתן להראות שמכפלתם 50. **לחישוב כפל מרוכבים משתמשים בחוק הפילוג,** (או, בעיקר, בייצוג פולרי שנראה בהמשך):

$$
\begin{aligned}
(5 + 5i)\,(5 - 5i) &= 5^2 \cancel{+5i \cdot 5} \cancel{-5i \cdot 5} - 5i \cdot 5i \\
&= 25 - 5^2 i^2 \underbrace{=}_{i^2=-1} 25 - 25 \cdot (-1) = 40
\end{aligned}
$$

משוואות עם נעלם מרוכב

$iz+2=-2z+9i$

דרך א' הצבת $z=a+bi$ ובהמשך פיצול למשוואות של החלק הממשי והחלק המדומה.

$$\begin{aligned}
i\left(a+bi\right)+2&=-2\left(a+bi\right)+9i\\
ai+bi^{2}+2&=-2a-2bi+9i\\
ai\color{blue}{-b+2}&=\color{blue}{-2a}-2bi+9i
\end{aligned}$$

מסתמכים על כך שהשוויון מתקיים בנפרד עבור החלק הממשי והחלק המדומה:

$$a+bi=c+di\rightarrow a=c\wedge b=d$$

$$\color{blue}{2a+2=b}\qquad ai+2bi=9i$$

$$\begin{aligned}
a+2b&=9\\
\text{הצבה}\quad a+2\left(\color{blue}{2a+2}\right)&=9\\
5a+4&=9\\
a&=1\rightarrow b=4
\end{aligned}$$

$$\boxed{z=1+4i}$$

חלוקת מרוכבים, צמוד, מישור גאוס

במשוואה הקודמת קל לבודד את z ולקבל:

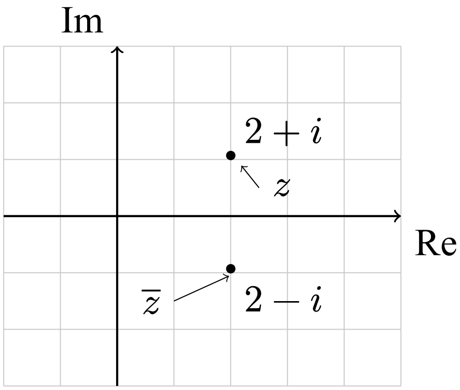
$$\begin{aligned}
z\left(2+i\right)&=-2+9i\\
z&=\frac{-2+9i}{2+i}
\end{aligned}$$

כדי לחלק מרוכבים נגדיר מושג חדש:

הצמוד: הצמוד של מספר מרוכב $a+bi$ הוא $a-bi$ (היפוך סימן של החלק המדומה). להמחשה ויזואלית נציג את המספרים במישור המכונה מישור גאוס.

מישורגאוס: דומה למערכת הצירים x,y המוכרת לנו, אך בציר ה-x מוצג הרכיב הממשי, ובציר ה-y מוצג הרכיב המדומה.

כך נראה המספר $2+i$ והצמוד לו $2-i$ במישור גאוס (שמות הצירים הם קיצור של $Real, Imaginary$):



הטכניקה לביצוע החלוקה שלעיל, היא **כפל בצמוד** (כפל בצמוד תמיד יוביל למכנה ממשי):

$$
\begin{aligned}
z=\frac{(-2+9i)\,(2-i)}{(2+i)\,(2-i)} &= \frac{-4+18i+2i\overbrace{-9i^2}^{+9}}{4-i^2} \\
&= \frac{-4+9+20i}{5} = \boxed{1+4i}
\end{aligned}
$$

הוצאת שורש ריבועי

נוציא שורש ריבועי של $5-12i$

$$\sqrt{5-12i}=z=a+bi/^2$$

$$5-12i=(a+bi)^2$$

$$5-12i=a^2+2abi-b^2$$

$$5=a^2-b^2, \qquad -12=2ab$$

$$\boxed{\frac{-12}{2b}=a}$$

$$5=\left(\frac{-12}{2b}\right)^2-b^2 \leftarrow$$

$$5\left(4b^2\right)=144-4b^4$$

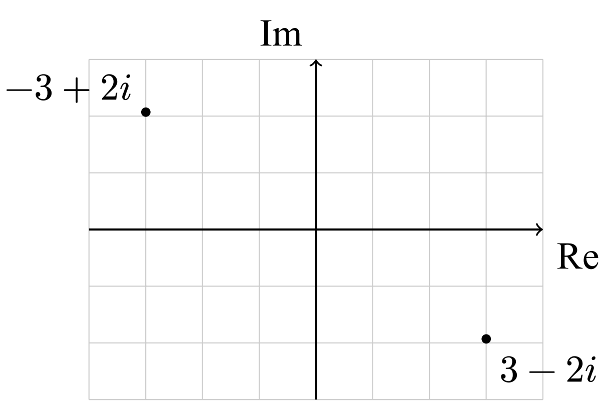
$$4b^4+20b^2-144=0 \qquad q=b^2\,\Big|_{q>0\ (b\ \text{ממשי})}$$

$$2q^2+20q-144=0 \rightarrow q_1=4, q_2=\cancel{-9}$$

$$b_{1,2}=\pm 2$$

$$b_1=2\rightarrow a_1=-3\rightarrow z_1=-3+2i$$

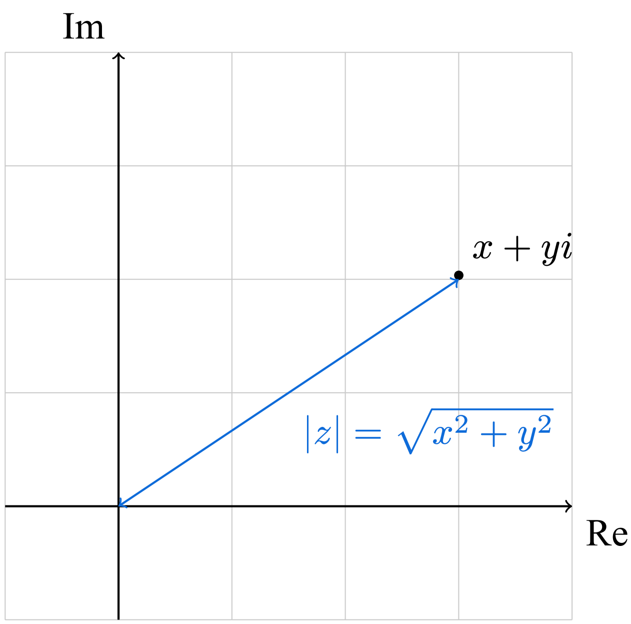
$$b_1=-2\rightarrow a_2=3\rightarrow z_2=3-2i$$



אלו מספרים **נגדיים**. הישר המחבר בינהם עובר בראשית הצירים, ומרחקם מהראשית (המודול) שווה.

מודול

ה**מודול** של מספר מרוכב $z=x+yi$ יסומן גם $|z|$ הוא מרחק הנקודה $x+yi$ מהראשית במישור גאוס:



דוגמא : נפתור את

$$|z+1-i| + 3z = 46+18i$$

$$\left|\overbrace{a+bi+1-i}^{(a+1)+(b-1)i+}\right| + 3z = 46+18i$$

$$\underbrace{\sqrt{(a+1)^2+(b-1)^2}}_{Re} + \underbrace{3a}_{Re} + 3bi = 46+18i$$

$$Im : 3bi = 18i \rightarrow \boxed{b=6}$$

$$Re : \sqrt{(a+1)^2+(6-1)^2} = 46-3a$$

$$Re : (a+1)^2+5^2 = (46-3a)^2$$

$$a^2+2a+26 = 2116-276a+9a^2$$

$$8a^2-278a+2090 = 0 \rightarrow a_{1,2} = \frac{95}{4}, 11$$

$$\boxed{z_1 = 11+6i}, \boxed{z_2 = \frac{95}{4}+6i}$$

לתרגול נוסף : גבע עמ' 722.

חקירת משוואה ריבועית 719/34

נתונה המשוואה $(mi-1)\,z^2+2\,(m+i)\,z+4=0$. לאיזה ערך של m יש למשוואה פתרון יחיד. מהו הפתרון היחיד?

לאיזה ערך של m אין למשוואה פתרון.

למשוואה פתרון יחיד כאשר $\Delta=b^2-4ac=0$ או כאשר המשוואה אינה ריבועית. נפתור תחילה מצב שאינה ריבועית:

$$(mi-1)=0\to m=\frac{1}{i}=\frac{1\cdot(-i)}{i\cdot(-i)}=\boxed{-i=m}$$

$$2\left(\overbrace{\cancel{-i}}^{m}\cancel{+i}\right)z+4=0\to\boxed{4=0\to \text{אין פתרון}}$$

במקרה הזה נוצרה משוואה ממעלה 0.

מקרה של פתרון יחיד:

$$\Delta=\overbrace{\cancel{4}\,(m+i)^2}^{b^2}-4\,\overbrace{(mi-1)}^{a}\cdot\overbrace{\cancel{4}}^{c}=0$$

$$m^2+2mi-1-4mi+4=0$$

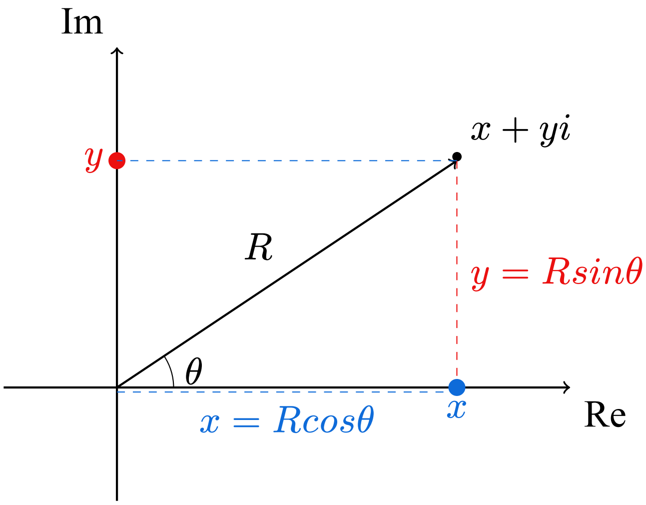
$$\text{שוב משוואה ריבועית}\quad m^2-2im+3=0$$

$$m_{1,2}\frac{2i\pm\sqrt{\overbrace{(-2i)^2-12}^{-16}}}{2}=i\pm 2i$$

$$m_1=3i$$

$$\text{נפסל קודם}\quad m_2=\cancel{-i}$$

ייצוג פולארי (קוטבי) של מרוכבים



$z = x + yi = R\left(\cos\theta + \sin\theta i\right) = Rcis\theta$.

כדי להמיר מייצוג אלגברי לפולרי יש לחשב $\theta = tg^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$. החישוב הנ"ל יתן זווית נכונה רק במקרה שהמספר ברביע 1 או 4. ברביע 2, תתקבל תוצאה שגויה (כאילו מדובר במספר הנגדי ברביע 4) וכאשר המספר המקורי ברביע 3, תתקבל תוצאה שגויה כאילו מדובר במספר ברביע 1.

הסיבה לכך היא ש-tg מחזיר רק זוויות בתחום $(-90, +90)$. הפונקציה אינה יודעת שחישבנו $tg^{-1}\left(\frac{-2}{-3}\right)$ עבור מספר ברביע 3. מבחינת הפונקציה מדובר ב- $tg^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$...לכן, במידת הצורך יש להוסיף לתוצאה 180° כדי לתקן את הרביע. אין שום קשר בין זה לבין תוספות $2\pi k$ לפתרונות של משוואת טריגונומטריות, ואין מדובר בשתי המרות חלופיות. רק אחת נכונה.

כמובן שיש לחשב גם את $R = \sqrt{x^2 + y^2}$, ורצוי גם לבדוק במחשבון באמצעות $\text{OPTN}, \downarrow, 1 : \triangleright r\angle\theta$.

הערה: ניתן כיום (2024) להשאיר פתרונות בייצוג פולארי כל עוד לא התבקש במפורש אחרת.

כפל וחילוק בייצוג קוטבי (פולארי)

כמעט בכל מצב של כפל וחילוק, ובהמשך החומר ככלל, נשאף לעבוד בייצוג קוטבי, מפני שפעולות כפל, חילוק, חזקה ושורש הופכות לפשוטות.

1. כפל: $\left(r_1cis\alpha\right)\left(r_2cis\beta\right) = r_1r_2cis\left(\alpha+\beta\right)$
2. חלוקה: $\frac{r_1cis\alpha}{r_2cis\beta} = \frac{r_1}{r_2}cis\left(\alpha-\beta\right)$
3. מכפל נובע משפט דה-מואבר: $\left(Rcis\theta\right)^n = R^ncis\left(n\theta\right)$
4. וממנו נובע: עבור משוואה נתונה $z^n = Rcis\theta$ השורשים הם $z_{k_{|k=0,1,2...n-1}} = \sqrt[n]{R}cis\left(\frac{\theta+360k}{n}\right)$
ניתן להראות שפתרונות משוואה זו הם:

- סדרה הנדסית,
- קודקודי מצולע משוכלל במישור גאוס,

- נמצאים על מעגל קנוני (מעגל שמרכזו בראשית הצירים),
- סכום השורשים 0.

נוסאות שימושיות לחישוב שטחים:

$S\triangle = \frac{a \cdot b sin\gamma}{2}$ (נמצא בדף נוסחאות. מכפלת צלעות בסינוס הזווית שבינהן חלקי 2),
$S\square = \frac{k_1 \cdot k_2 sin\alpha}{2}$ (לכל מרובע, מבוסס על שטחי משולש, אבל המכפלה היא מכפלת אלכסונים. מתאים במיוחד לצורות המבוססות על שורשי מרוכבים מפני שהישר המחבר בינהם במקרים רבים עובר בראשית, וקל למצוא את אורך האלכסון).