גיאו+טריגו מבגרויות 571, 581

גיא סידס

15 במרץ 2025

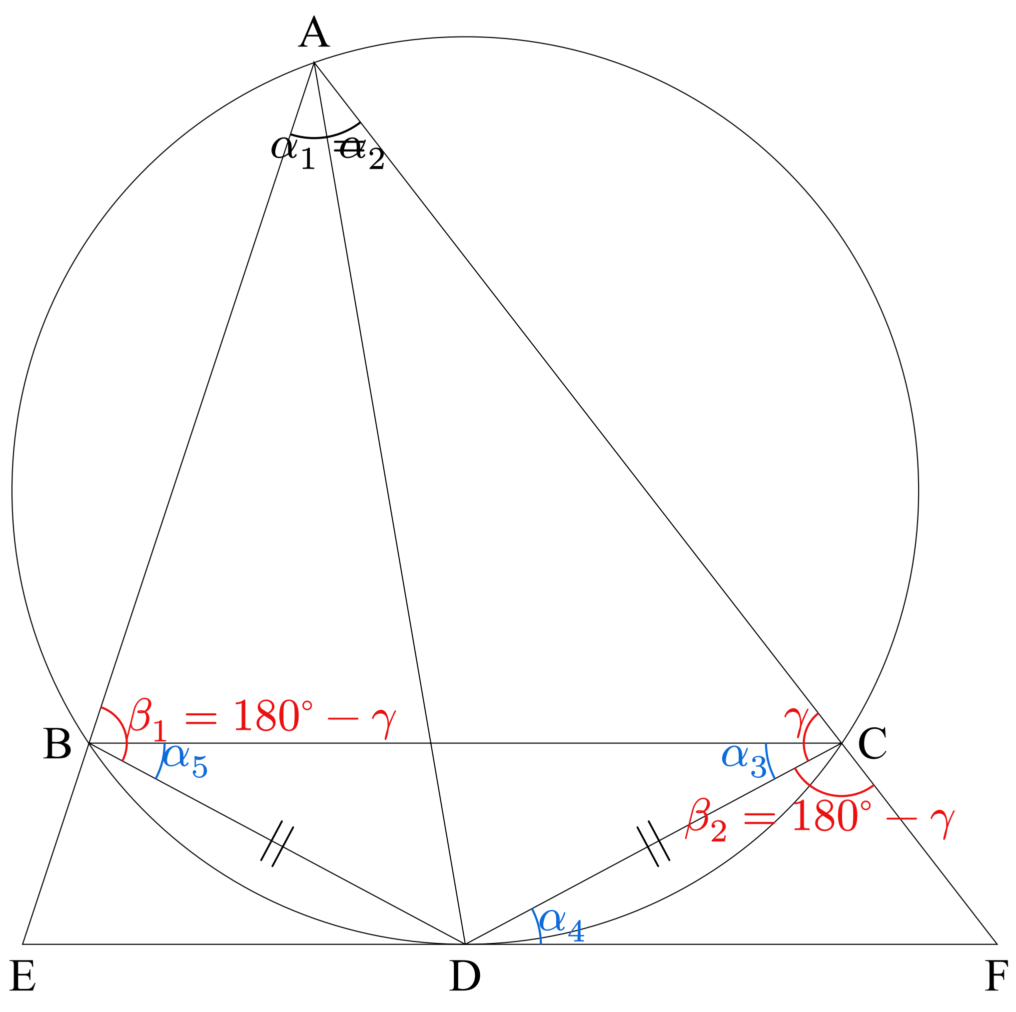
תוכן העניינים

בגרות 10

שאלה 4

נתון כי במשולש AEF חוצה-זווית EAF הוא AD. D היא נקודת ההשקה של הצלע EF למעגל החותך את הצלעות AE ו-AF בנקודות B ו-C בהתאמה. המעגל עובר גם דרך קדקוד A.

א. יש להוכיח כי $BC \parallel EF$



הוכחה: נסמן את הזוויות שבציור: $\alpha_1 = \measuredangle BAD \underbrace{=}_{\text{נתון חוצה זווית}} \alpha_2 = \measuredangle DAC,$

$\alpha_3 = \measuredangle DCB, \alpha_4 = \measuredangle CDF, \alpha_5 = \measuredangle DBC$

$$\alpha_4 \underbrace{=}_{\text{זווית בין משיק למיתר}} \alpha_2 \underbrace{=}_{\text{זוויתחוצהנתון}} \alpha_1 \underbrace{=}_{\text{היקפיות לאותו מיתר}} \alpha_3$$

$$BC \parallel EF \underbrace{\to}_{\text{מתחלפות שוות}} \alpha_3 = \alpha_4$$

מ.ש.ל א'.

ב) יש להוכיח $\triangle ABD \sim \triangle DCF$

הוכחה: נסמן את $\measuredangle ABD = \beta_1, \measuredangle DCF = \beta_2, \measuredangle ACD = \gamma$

$$180^\circ - \gamma \underbrace{=}_{\text{סכום ז' נגדיות במרובע חסום}=180^\circ} \beta_1$$

אבל גם $\beta_2 = 180^\circ - \gamma$ ומכלל מעבר $\beta_1 = \beta_2$.

קיבלנו מ.ש.ל ב': $\triangle ABD \sim \triangle DCF$ לפי דמיון ז.ז. (כבר ידוע $\alpha_4 = \alpha_1$ מסעיף א).

ג) יש להוכיח $AD \cdot BD = DF \cdot AB$

אסטרטגיה: יש ללכת לאחור. נשים לב כי ההוכחה שקולה להוכחת $\frac{AB}{BD} = \frac{AD}{DF}$ וכי $\frac{AD}{DF}$ הוא יחס הדמיון במשולשים הדומים מהסעיף הקודם.

$\alpha_3 \underbrace{=}_{\text{הוכחנו}} \alpha_1 \xlongequal[\text{היקפיות לאותו מיתר}]{} \alpha_5$ ונובע $DC = BD$.

הוכחה: $DF \cdot BD \;/\cdot \frac{AB}{BD} \underbrace{=}_{DC=BD} \frac{AB}{DC} \xlongequal[\text{צלעות מתאימות במשולשים דומים}]{} \frac{AD}{DF} = $ יחס הדמיון

וקיבלנו $AD \cdot BD = DF \cdot AB$ מ.ש.ל ג'.

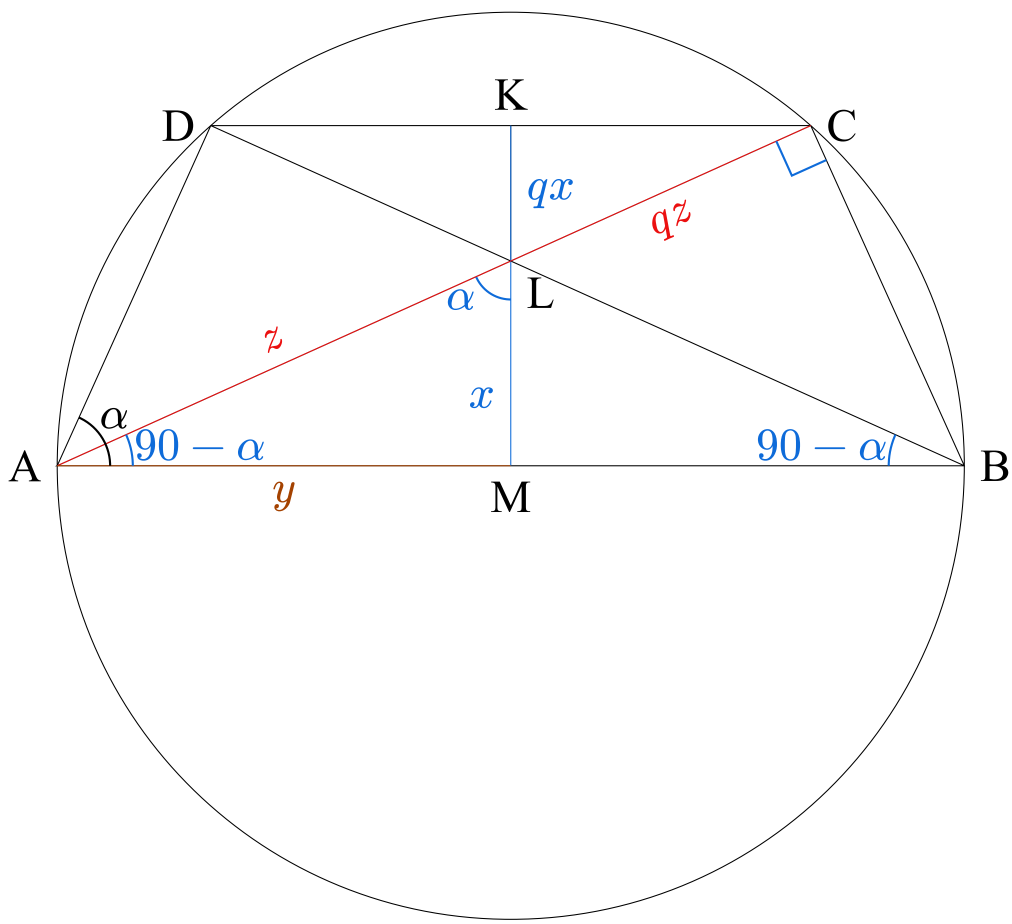
12ד'.

שאלה 5

טרפז שווה-שוקיים $ABCD$ $(AB \parallel DC)$ חסום במעגל שמרכזו M. הבסיס AB הוא קוטר במעגל זה. אלכסוני הטרפז נפגשים בנקודה L. המשך ML חותך את DC בנקודה K (ראה ציור). נתון כי $\measuredangle BAD = \alpha$.

הבע באמצעות α את היחס $\frac{KL}{LM}$.

$08:06 - 08:15$



נסמן $KL = q \cdot x, LM = x$ ונחפש את היחס $q = \frac{qx}{x} = \frac{KL}{LM}$

ן גם את יתר הצלעות ב- $\triangle ALM$ $AL = z, AM = y$ ומכאן, מדמיון $(\triangle ALM \sim \triangle CLK)$,

נובע $LC = qz$.

כעת ניתן לבטא את יחס הצלעות בשני אופנים (היחס $\frac{z+qz}{2y}$ ב- $\triangle ACB$ המתאים ליחס $\frac{y}{z}$ ב-$\triangle ALM$):

$$\boxed{\frac{z+qz}{2y} = \frac{y}{z}} = cos\left(90-\alpha\right) = sin\alpha$$

מהמשוואה המוקפת ניתן לחלץ את q באלגברה פשוטה (כפל בהצלבה):

$$\left(1+q\right)z^2 = 2y^2 \rightarrow q = 2\frac{y^2}{z^2} - 1$$

כבר מצאנו כי $\frac{y}{z} = sin\alpha$ ומכאן שקיבלנו כי $\boxed{q = 2sin^2\alpha - 1}$

מזהות טריגו, זה תואם לתשובה שבספר...(אין צורך להגיע דווקא ל- $cos2\alpha$)

בגרות 11

שאלה 5

נתון מעוין $ABCD$. E ו- F הן נקודות על הצלעות AD ו- AB בהתאמה כך ש- $AE = AF$ ו- $FB = 2AF$.

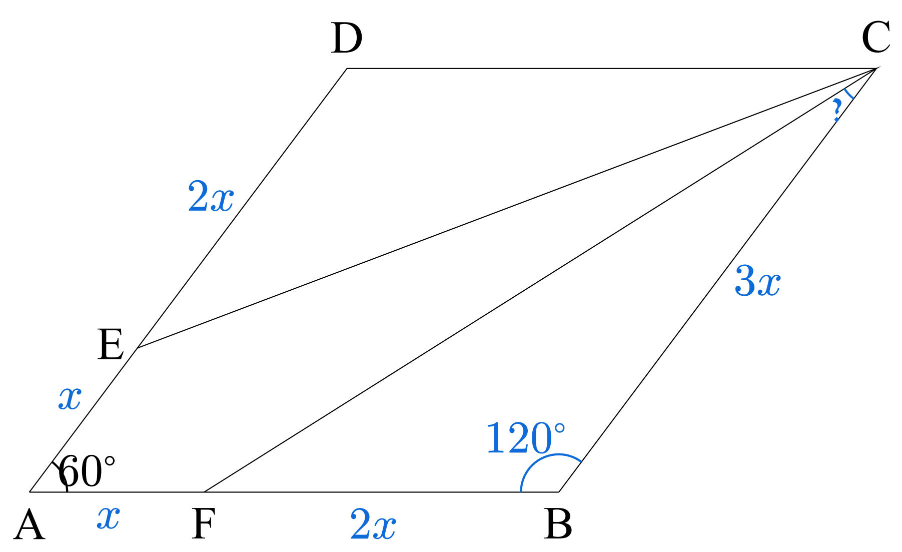
נתון כי $\measuredangle DCB = 60^\circ$.

א. מצא את גודל הזווית $\measuredangle FCB$.

א) בהעדר רעיון מוצלח יותר נמצא את FC באמצעות משפט קוסינוסים, ואז נוכל למצוא את הזווית באמצעות משפט סינוסים.

$$FC = \sqrt{(2x)^2 + (3x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3x \cdot cos120} = \sqrt{13x^2 + 6x^2}$$

$$FC = x\sqrt{19}$$



וכעת משפט סינוסים $*$ ב-$\triangle FCB$:

$$\frac{FC}{sin120} = \frac{x\sqrt{19}}{0.5\sqrt{3}} =^{*} \frac{2x}{sin(\measuredangle FCB)}$$

$$sin\left(\measuredangle FCB\right) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{19}} \rightarrow \measuredangle FCB = sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{19}}\right) = \boxed{23.41^\circ}$$

הערה: בהתחלה עקב חוסר תשומת לב, נשאר לי $0.5\sqrt{3}$ במונה וקיבלתי לכן זווית 11.46°. **תשובה כזו נופלת מייד! בבדיקת שפיות**. זה קטן מדי ביחס ל-60 מעלות. השרטוט בקנ"מ **ומצפים לכן לזווית גדולה מ- 20 מעלות.**

ב) נתון כי אורך האלכסון AC הוא b. הבע באמצעות b את היקף המרובע $AECF$.

ב) היקף המרובע הרצוי על פי מה שידוע מסעיף א' הוא $2x+2x\sqrt{19}$ או $2x\left(1+\sqrt{19}\right)$.
נותר רק להביע את $2x$ באמצעות האלכסון b

$$b=6xcos30\rightarrow 2x=\frac{b}{3cos30}$$

ומכאן שההיקף הוא $\frac{b}{3cos30}\left(1+\sqrt{19}\right)=\boxed{2.063b}$

$08:58$

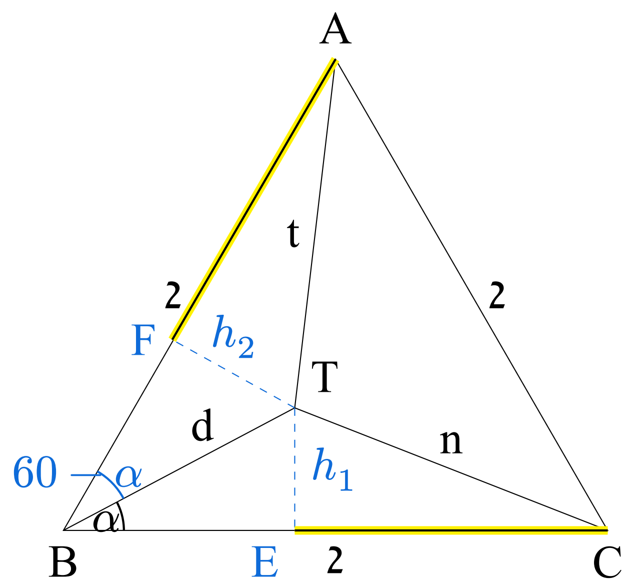
בגרות 12

שאלה 5

נתון משולש שווה-צלעות ABC. נקודה T נמצאת בתוך המשולש. נתון $\measuredangle TBC = \alpha$,
$AT =_{ס"מ} t$,$BT =_{ס"מ} d$,$CT =_{ס"מ} n$. אורך צלע המשולש הוא 2 ס"מ.

א. הוכח כי $\sin\left(\alpha - 30^\circ\right) = \frac{n^2 - t^2}{4d}$.

ב. הבע את שטח המשולש $\triangle ATC$ באמצעות α ו- d.



א) ראשית נבטא את n^2 באמצעות פיתגורס:

$$EC = 2 - dcos\alpha ,h_1 = dsin\alpha$$

$$n^2 = \left(2 - dcos\alpha\right)^2 + \left(dsin\alpha\right)^2$$

באותו אופן גם $h_2 = dsin\left(60 - \alpha\right)$ וגם $FA = 2 - dcos\left(60 - \alpha\right)$ ומכאן:

$$t^2 = \left(2 - dcos\left(60 - \alpha\right)\right)^2 + \left(dsin\left(60 - \alpha\right)\right)^2$$

מפתיחת סוגריים מתקבל:

$$n^2=4-4dcos\alpha+\overbrace{d^2cos^2\alpha+d^2sin^2\alpha}^{d^2}$$

$$t^2=4-4dcos\left(60-\alpha\right)+\overbrace{d^2cos^2\left(60-\alpha\right)+d^2sin^2\left(60-\alpha\right)}^{d^2}$$

ומחיסור משוואות:

$$n^2-t^2=\cancel{4-4}+4d\left(cos\left(60-\alpha\right)-cos\alpha\right)+\cancel{d^2-d^2}$$

ומכאן שנותר להוכיח כי $cos\left(60-\alpha\right)-cos\alpha=sin\left(30-\alpha\right)$

נוכיח לפי זהות סכום זוויות:

$$cos\left(60-\alpha\right)-cos\alpha=-2\overbrace{sin\left(\frac{60-\alpha+\alpha}{2}\right)}^{0.5}sin\left(\frac{60-\alpha-\alpha}{2}\right)=$$

$$=-1\cdot sin\left(30-\alpha\right)=^{*}\boxed{sin\left(30-\alpha\right)}$$

*זהות: $sinx=-sin\left(-x\right)$

מ.ש.ל.

$22:10$ (כולל 20 דק הפסקה, רישום, וטלפונים לקינפוג LyX)

3) $35:10$ אחרי הפסקה והקלדות.

נחשב דווקא את שטח שני המשולשים האחרים. הגבהים לצלעות באורך 2 הם:

נתונים הגבהים שחישבנו קודם: $h_2=dsin\left(60-\alpha\right),h_1=dsin\alpha$

ומכאן ששטחי המשולשים הם $s_1=\frac{2\cdot}{2}dsin\alpha$

ו- $s_2=\frac{2\cdot}{2}dsin\left(60-\alpha\right)$

וסכומם בסה"כ $d\left(sin\left(60-\alpha\right)+sin\alpha\right)$

$$S_{\triangle ABC}=\frac{2\cdot2sin60}{2}=\sqrt{3}$$

ומכאן $\boxed{S_{\triangle ATC}=\sqrt{3}-d\left(sin\left(60-\alpha\right)+sin\alpha\right)}$

בגרות 13

שאלה 5

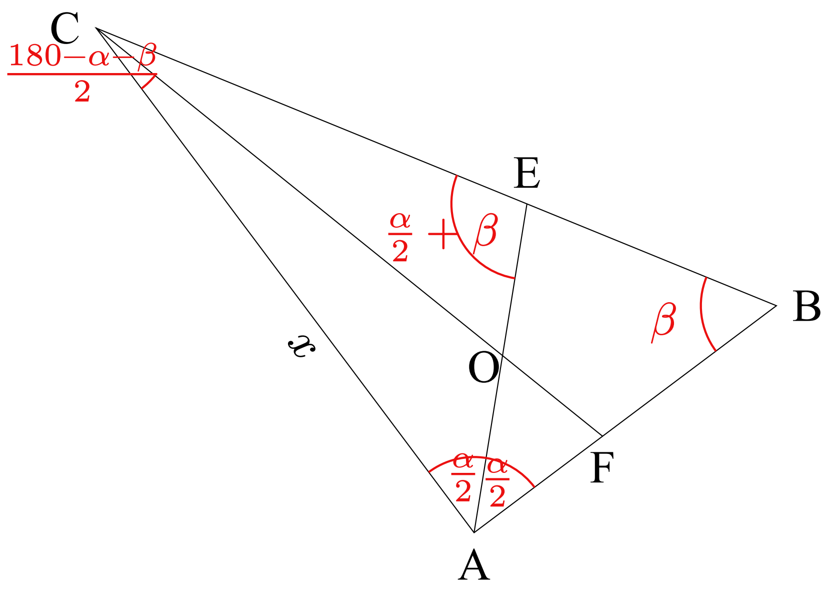
הנקודה O היא מרכז המעגל החסום במשולש ABC.

המשך AO חותך את הצלע BC בנקודה E. המשך CO חותך את הצלע AB בנקודה F(ראה איור).

נתון: $\measuredangle ABC=\beta,\ \measuredangle BAC=\alpha$.

א. הבע באמצעות α ו-β את היחס $\frac{AE}{CF}$.

ככה כנראה נראה תרגיל שכדאי לעזוב. לא השוויתי ל-$TikTek$ אבל לקח לי הרבה יותר מדי זמן...



משפט סינוסים ב-$\triangle ACF$

$$\frac{CF}{sin\alpha}=\frac{X}{sin\left(180-\alpha-\underbrace{\frac{180-\alpha-\beta}{2}}_{\measuredangle ACF}\right)}$$

ומכאן $①CF=\frac{xsin\alpha}{sin\left(90+\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right)}$

באותו משולש מתקיים גם:

$$\frac{AE}{sin(180-\alpha-\beta)}=\frac{x}{sin(\frac{\alpha}{2}+\beta)}$$

ומכאן $②AE=\frac{xsin(\alpha+\beta)}{sin(\frac{\alpha}{2}+\beta)}$

$$\frac{AE}{CF}=\frac{②}{①}=\boxed{\frac{xsin\left(\alpha+\beta\right)}{sin\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)}\cdot\frac{sin\left(90+\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right)}{xsin\alpha}}$$

ב. נתון גם: $\frac{AE}{CF}=\frac{1}{2}$, $\beta=60^\circ$.

הראה כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש $\triangle ACB$ שווה ל- $\frac{1}{2}BC$.

ב) השאיפה היא להוכיח כי $\alpha=90$ כי אז בהכרח AB קוטר, ושווה ל-$2R$ מעגל חוסם.

בנוסף יתקיים $\frac{BC}{AB}=sin\measuredangle C=sin30=\frac{1}{2}$ ומתקבל $BC=R$).

נציב אם כן $\beta=60$ ואת היחס $\frac{1}{2}$ הנתון.

$$\frac{1}{2}=\frac{sin(\alpha+60)}{\cancel{sin(\frac{\alpha}{2}+60)}}\cdot\frac{\cancel{sin(90+\frac{\alpha}{2}-30)}}{sin\alpha}$$

ונותר לפתור את המשוואה הטריגונומטרית:

$$sin\alpha=2sin\left(\alpha+60\right)$$

נפתח את RHS לפי נוסחת סכום זוויות:

$$sin\alpha=2\left(sin\alpha\underbrace{cos60}_{0.5}+cos\alpha sin60\right)$$

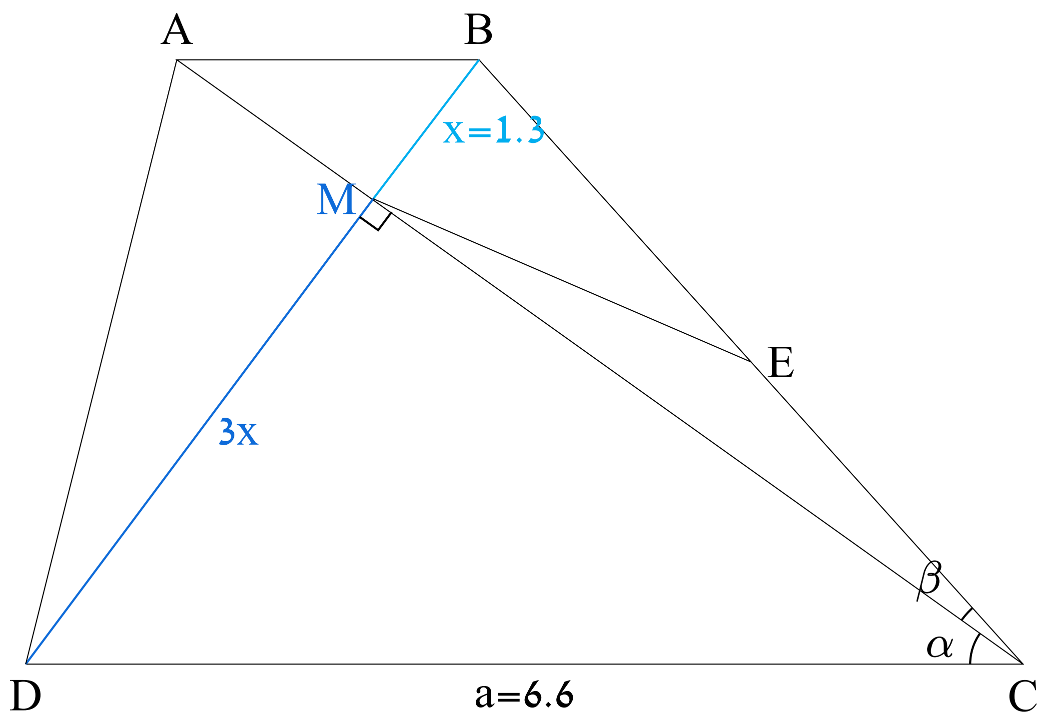
$$\cancel{sin\alpha}\xrightarrow{0}=\cancel{sin\alpha}+2cos\alpha sin60\rightarrow$$

$cos\alpha=0\rightarrow\alpha=90$ כרצוי.

בסה"כ אני מאד מקווה שיש פתרון פשוט יותר ב-$TikTek$

בגרות 19

שאלה 5



א.

$ME = BE = CE$ (תיכון במשולש ישר זווית שווה למחצית היתר)

$BC = \frac{a \cdot cos\alpha}{cos\beta}$ (טריגו בסיסי)

מכאן $ME = \frac{a \cdot cos\alpha}{2cos\beta}$

ב. מהנתון ומהגדרת tan נובע ש $\frac{1}{3} = \frac{MB}{DM} = \frac{\frac{MB}{MC}}{\frac{DM}{MC}}$.

מתאלס הרחבה 2 מתקיים בהתאמה ש- $\frac{1}{3} = \frac{AB}{DC}$

מתקבל $AB = \frac{DC}{3} = 2.2$

נתון בנוסף $BM = 1.3$,

ג. מהנתון נובע $DM = 3.9$ (יחס $3:1$).

מכאן $\alpha = sin^{-1}\left(\frac{3.9}{6.6}\right) = \boxed{36.22}$ נשמור ב- $\boxed{A}$

$CM = 6.6cos\alpha = 5.32$ נשמור ב- $\boxed{C}$

$\beta = tan^{-1}\left(\frac{1.3}{5.32}\right) = \boxed{13.72}$, נשמור ב- $\boxed{B}$

$\measuredangle DCB = \alpha + \beta = \boxed{49.9422}$

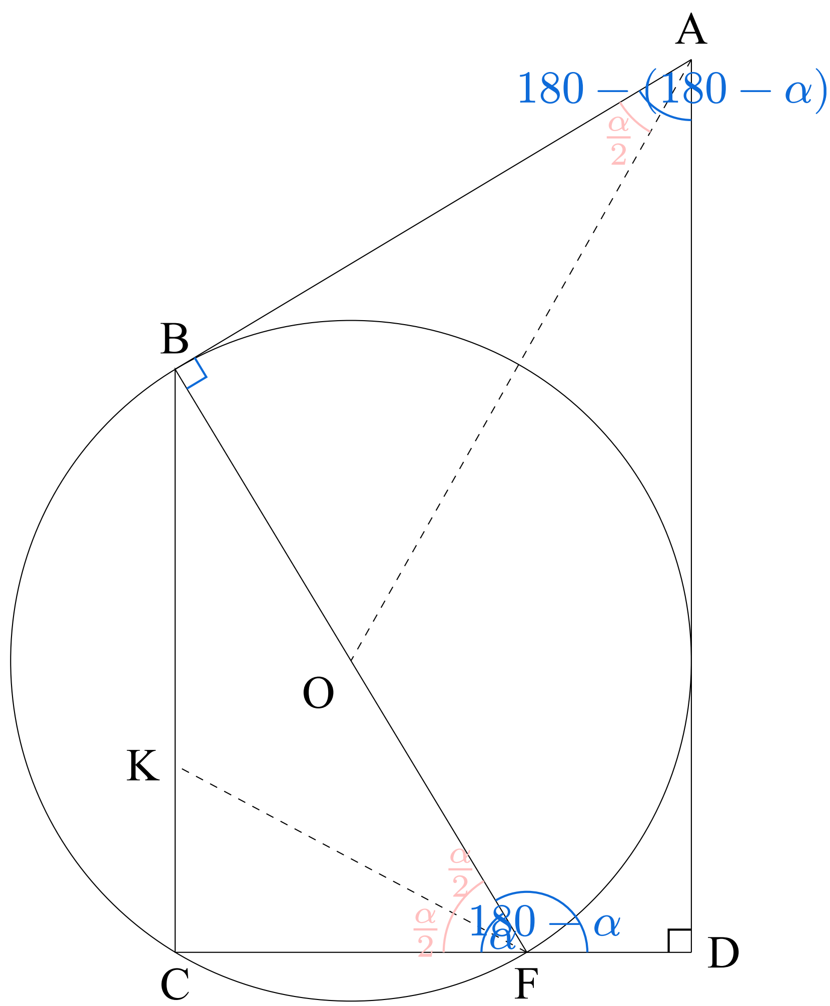
בגרות 31

שאלה 4

המשולש $\triangle BCF$ חסום במעגל שמרכזו O ורדיוסו R. BF הוא קוטר המעגל. מן הנקודה A יוצאים שני משיקים למעגל - האחד משיק למעגל בנקודה B והאחר חותר את המשך הצלע CF בנקודה D, כמתואר בציור שלפניך.

נתון $AD \perp CD$.

א. הוכח: $\measuredangle BFC = \measuredangle BAD$



הוכחה: $ABFD$ בר חסימה במעגל (שתי הזוויות של $90°$ סכומן 180. האחת נתונה והשניה - רדיוס מאונך למשיק בנקודת ההשקה).

סימון: $\measuredangle BFC=\alpha$, $BFD=180-\alpha$ משלימה, ומכאן $\measuredangle A=180-(180-\alpha)=\alpha$ מ.ש.ל (א).

נתון K נקודה על הצלע BC, כך ש-FK חוצה את $\measuredangle BFC$.

ב.הוכח: $KC=\frac{CF\cdot BO}{AB}$.

ניתן להוכיח כל אחד משני היחסים שלהלן וממנו להגיע למ.ש.ל:

$\frac{CF}{AB}=\frac{KC}{BO}$ ① או $\frac{BO}{AB}=\frac{KC}{CF}$.

נעדיף להוכיח את ① שמתקיים בזכות דמיון: $\triangle OBA \sim \triangle KCF$. הדמיון ז.ז. נובע מזוויות ה-$90°$ והזווית $\measuredangle BAO=\frac{\alpha}{2}$ (קטע המחבר את מרכז המעגל לנקודה ממנה יוצאים שני משיקים למעגל, חוצה את הזווית שבין המשיקים).

$\frac{CF}{AB}=\frac{KC}{BO}=$ יחס הדמיון (אלו צלעות מתאימות במשולשים הדומים),

ומכאן באלגברה, $KC=\frac{CF\cdot BO}{AB}$ מ.ש.ל ב'.

ג. הוכח $KB\cdot AB=2R^2$

- גם כאן ניתן לפרק לשני יחסים, ונבחר להראות כי מתקיים $\frac{R}{AB}=\frac{KB}{2R}$

ממשפט חוצה הזווית במשול $\triangle BCF$ מתקיים $\frac{KC}{CF}\overset{\text{משפט חוצה הזווית}}{=}\frac{KB}{\underbrace{BF}_{2R}}$ ומסעיף ב' מתקיים

(אלגברה) $\frac{\overbrace{BO}^{R}}{AB}=\frac{KC}{CF}$ ובסה"כ (כלל מעבר) מתקיים $\frac{R}{AB}=\frac{KB}{2R}$ ומכאן $KB\cdot AB=2R^2$ כרצוי. משל ג'.

ד. הסבר מדוע $S_{\triangle KFC}>S_{\triangle BFK}$.

הסבר: השאלה שקולה להסבר מדוע הבסיסים $KC>KB$ (שכן הגובה CF משותף

לשני המשולשים). ממשפט חוצה הזווית ב-$\triangle CFB$ מתקיים $\frac{BO}{CF} = \frac{KB}{KC}$ ולכן די אם נוכיח כי $BO > CF$, וזה נכון שכן BF הוא היתר ב-$\triangle CFB$, ולכן גדול מ-CF הגדולה (מפיתגורס).

בגרות 32

שאלה 4

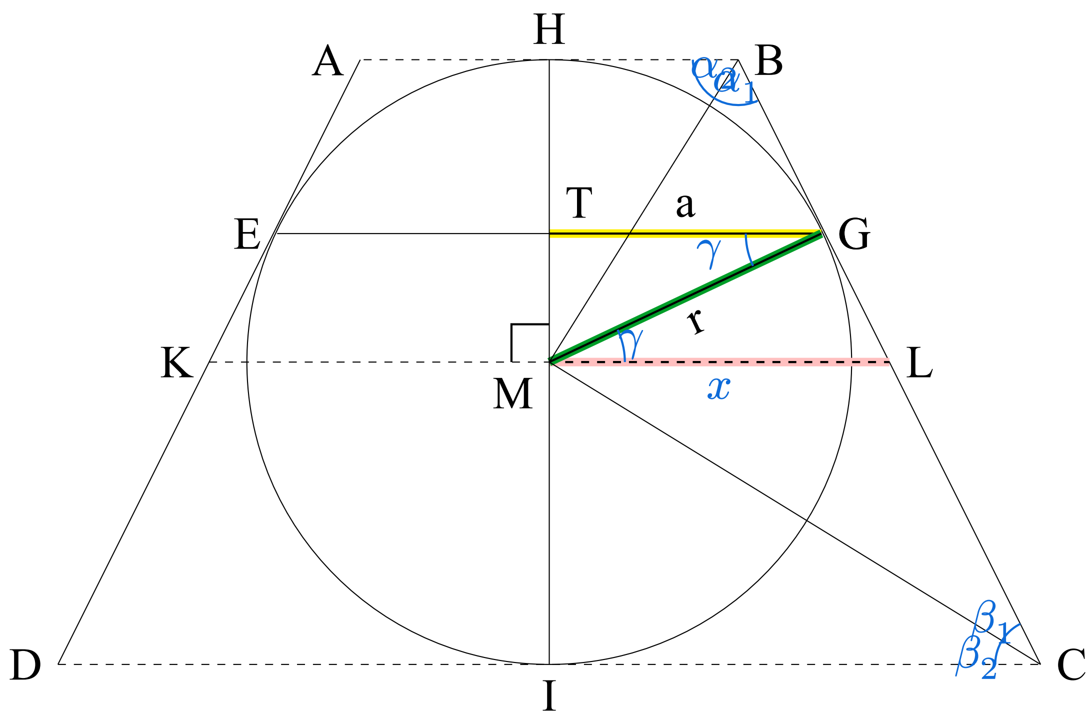
EG הוא מיתר במעגל שמרכזו M ורדיוסו r. דרך נקודות E ו-G העבירו משיקים למעגל. דרך מרכז המעגל, M, העבירו ישר המקביל למיתר EG וחותך את המשיקים בנקודות K ו- L כמתואר בציור. דרך מרכז המעגל, M, העבירו אנך ל-KL אשר חותך את המיתר EG בנקודה T ואת המעגל בנקודות H ו-I, כמתואר בציור. נסמן $TG = a$.

א.(1) הוכח: $TG \cdot ML = MG^2$.

(2) הבע את אורך הקטע KL באמצעות a ו- r .

הוכחה: נסמן את $ML = x$. צ"ל $ax = r^2$, כלומר $\frac{a}{r} = \frac{r}{x}$ (1).
הזוויות γ בציור מתחלפות בין מקבילים ולכן שוות.
הזוויות $\measuredangle MTG = \measuredangle LGM = 90^\circ$ (אנך ל-KL מאונך גם למקביל לו -EG, וגם הרדיוס MG מאונך למשיק בנקודת ההשקה).
לכן מתקיים (1) מדמיון ז.ז. משל א.1.
נוכיח כי $KM = ML$:
אם נחבר את EM ניתן לחפוף את $\triangle GMT \cong \triangle EMT$ (צ.ז.צ, אנך למיתר חוצה אותו), ובהמשך לחפוף את $\triangle GML \cong \triangle EMK$ (זווית $\gamma = \measuredangle MET \overset{\text{מתחלפות}}{=} \measuredangle EMK$ והחפיפה ז.צ.ז).

נובע $KL = 2x$ מהסעיף הקודם $x = \frac{r^2}{a}$, ולכן $KL = \frac{2r^2}{a}$



דרך הנקודות H ו- I העבירו משיקים למעגל כך שנוצר טרפז שווה שוקיים $ABCD$ שחוסם את המעגל כמתואר בציור.

ב.(1) הוכח $BC = KL$.

(2) הבע את היקף הטרפז $ABCD$ באמצעות a ו- r .

ג. האם היחס בין היקף הטרפז $ABCD$ להיקף המעגל יכול להיות קטן מ- $\frac{4}{\pi}$? נמק.

נשים לב כי אם הטענה נכונה אז $x = \frac{1}{2}BC$ והמשולש $\triangle BMC$ ישר זווית. זהו לכן הכיוון להוכחה (בחשיבה לאחור).

הוכחה: סימון $\measuredangle MBA = \alpha_2, \alpha_1 = \measuredangle MBL, \beta_2 = \measuredangle MCL, \beta_1 = \measuredangle MCI$.

טענות + סימון: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha, \beta_1 = \beta_2 = \beta$ (קטע המחבר את מרכז המעגל לנקודה ממנה יוצאים שני משיקים למעגל, חוצה את הזווית שבין המשיקים).

$2\alpha + 2\beta = 180^\circ$ (חד צדדיות בין מקבילים).

מכאן $\alpha + \beta = 90^\circ$ ונובע $\measuredangle BMC = 90^\circ$ (סכום זוויות במשולש). נותר רק לטעון ש-ML אכן חוצה את BC. זה מתקיים כיוון שהוא יוצא ממחצית הצלע HI ($r = r$) ומקביל לבסיס, לכן הוא ק"א בטרפז $HICB$ וחוצה גם את השוק BC.

התיכון ליתר במשולש ישר זווית שווה למחציתו, ומכאן $x = \frac{1}{2}BC$ כרצוי, וקיבלנו $KL =$ BC מ.ש.ל ב'(1).

הטרפז שווה שוקיים. נחשב את מחצית ההיקף הימנית (כל הטיעונים להלן תקפים גם למחצית השמאלית מטעמי סימטריה).

$CG = CI, BG = BH$ (שני משיקים למעגל היוצאים מאותה נקודה שווים זה לזה).

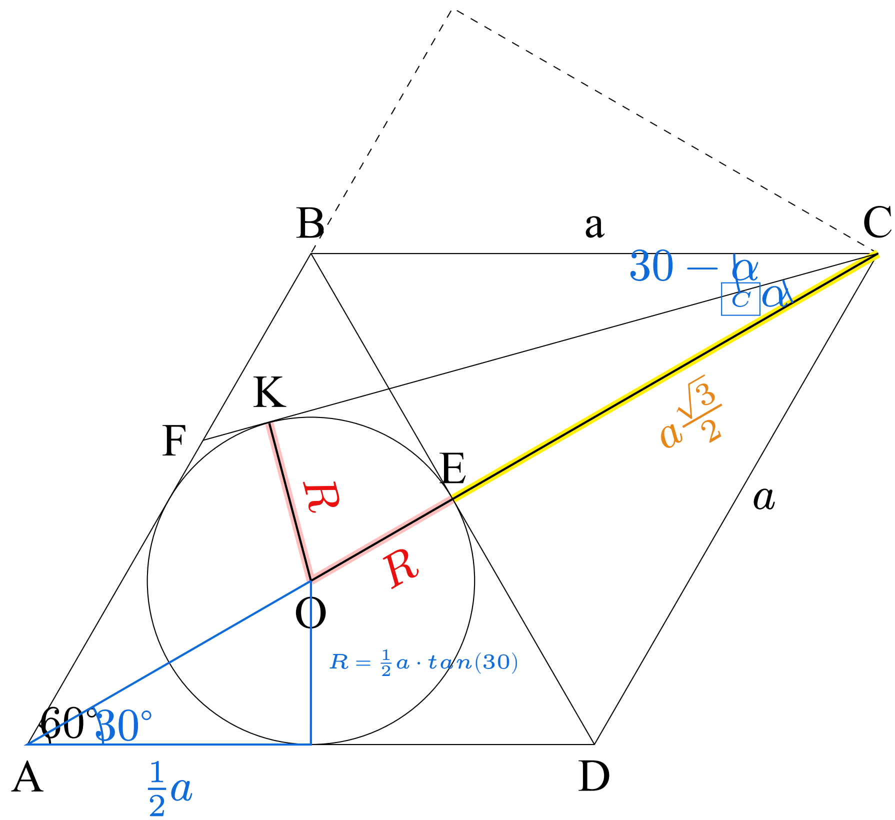
מכאן, כיוון ש- $2x = BC = CG + BG$ גם $CI + BH = BC = 2x$ בסה"כ היקף הטרפז הוא $8x$ כלומר $\boxed{P_{\text{טרפז}} = 4KL = \frac{8r^2}{a}}$. טיעון חלופי המסתמך על ב(1) הוא שכיוון שגם- KL ק"א בטרפז $ABCD$ (בעקבות היות ML ק"א) ולכן הוא שווה לממוצע הבסיסים, ונובע שסכום הבסיסים $AB + DC = 2KL$ ובסה"כ ההיקף $4KL$.

ג': לא. היקף המעגל הוא $2\pi r$ והיחס בין ההיקפים הוא $\frac{8r^2}{a} \cdot \frac{1}{2\pi r} = \frac{4r}{\pi a}$. r הוא היתר במשולש $\triangle MTG$ לכן $r > a$ ו-$\frac{r}{a} > 1$ (או שווה 1 במקרה שהטרפז ריבוע והמשולש מנוון).

מכאן שהיחס $\frac{4r}{\pi a} > \frac{4}{\pi}$.

שאלה 5

א. $R=\frac{1}{2}atan\left(30^{\circ}\right)$ (מרכז המעגל החסום הוא מרכז חוצי הזווית ולכן $\measuredangle OAD=30^{\circ}$)



ב. $R=\frac{1}{2}a\cdot tan(30)=\boxed{\frac{\sqrt{3}}{6}a}$

$$EC=acos30=asin60=a\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$sin\alpha=\frac{R}{R+EC}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{6}\cancel{a}}{\frac{\sqrt{3}}{6}\cancel{a}+\cancel{a}\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$\alpha=sin^{-1}\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{6}}{\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)=14.478^{\circ}\xrightarrow[\text{STO}]{}\boxed{C}$ סימון $\boxed{C}$ (ושומר את α בזכרון הנ"ל).

ג. נפתור ב-2 דרכים: משפט סינוסים ב- $\triangle FBC$:

$$\frac{BF}{sin\left(30-\boxed{C}\right)}=\frac{a}{sin\left(180-120-\left(30-\boxed{C}\right)\right)}$$

$$BF=\frac{sin\left(30-\boxed{C}\right)}{sin\left(30+\boxed{C}\right)}=0.382a$$

$$AF = 1 - BF = 0.618a$$

$$S_{\triangle ACF} = \frac{AF \cdot h}{2} = \frac{0/618a}{2} \cdot a\frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{0.268a^2}$$

דרך חלופית: $FC = \frac{a\frac{\sqrt{3}}{2}}{cos\left(60-\boxed{C}\right)}$ כדי לראות את זה צריך להוריד גובה מ-C ל- AB.

$$S_{\triangle ACF} = \frac{1}{2}FC \cdot AC \cdot sin\boxed{C} = \frac{1a^2 \cdot 3}{2 \cdot 2cos\left(60-\boxed{C}\right)} = 0.268a^2$$

בגרות 33

שאלה 5

א) $\frac{x}{sin(90-\alpha)}=2R_1$

$\frac{x}{sin(180-\alpha-\beta)}=2R_2$

ומכאן $\boxed{\frac{sin\left(\alpha+\beta\right)}{cos\alpha}}=\frac{2R_1}{2R_2}=\frac{\frac{x}{cos\alpha}}{\frac{x}{sin(\alpha+\beta)}}$

ב) $2\ \forall\alpha<90\ \overbrace{<}^{\text{תכונות הסינוס}}\ \frac{2sin\alpha\cancel{cos\alpha}}{\cancel{cos\alpha}}\ \overbrace{=}^{\text{זהות זווית כפולה}}\ \frac{sin\ \overbrace{2\alpha}^{\alpha+\beta}}{cos\alpha}\leftarrow\alpha=\beta$

ג1) $\measuredangle ECD=30\leftarrow\alpha=60$ ומחישוב זוויות מתקבלות זוויות בסיס: $75^\circ,75^\circ$ ולכן $\triangle ECD$ שו"ש.

ג2) $BC,AD=2R_1sin30=R_1,$

$DC,AB=2R_1cos30=\sqrt{3}R_1$

משפט קוסינוסים ב-$\triangle BEC$

$BE^2=R_1^2+\left(\sqrt{3}R_1\right)^2-\cancel{2}R_1\sqrt{3}R_1\cancel{cos60}$

$=R_1^2\left(1+3-\sqrt{3}\right)=\boxed{R_1^2\left(4-\sqrt{3}\right)}$

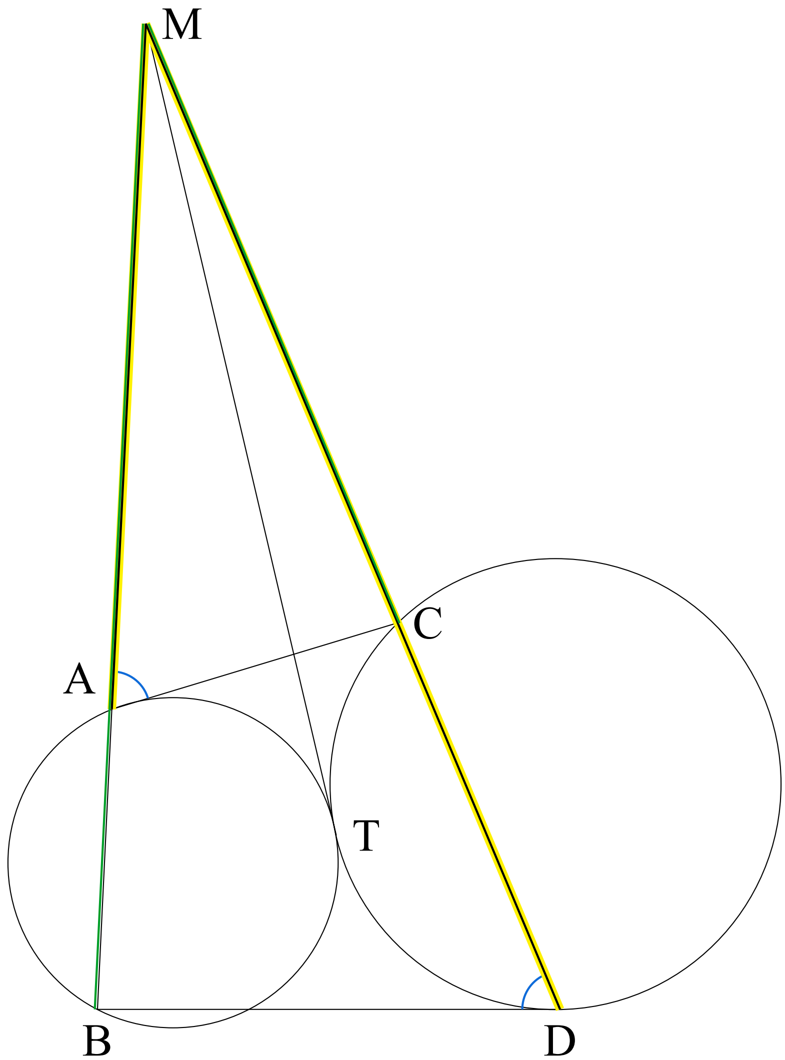
בגרות 35

שאלה 4

נתונים שני מעגלים, המשיקים זה לזה מבחוץ בנקודה T. דרך הנקודה T העבירו משיק המשותף לשני המעגלים. מן הנקודה M שעל המשיק העבירו שני ישרים החותכים את המעגלים , בנקודות A, B, C, D כמתואר בציור.

א.1) הוכח: $MA \cdot MB = MC \cdot MD$.

א.2) הוכח כי המרובע $ABCD$ הוא בר חסימה במעגל.



הוכחה: $MA\cdot MB =^* MT^2 =^* MC\cdot MD$ משפט 103: .אם מנקודה שמחוץ למעגל יוצאים חותך ומשיק, אז מכפלת החותך בחלקו החיצוני שווה לריבוע המשיק. מכלל המעבר מ.ש.ל א1.

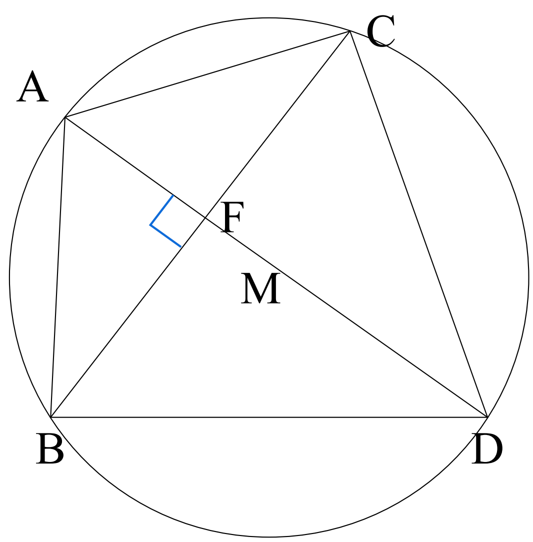
א2) הוכחה: מא1 נובע $\frac{MC}{MB} = \frac{MA}{MD}$ וכיוון שיש זווית משותפת $\measuredangle A$ אז לפי דמיון צ.ז.צ המשולשים $\triangle MDC \sim \triangle MAC$ ונובע $\measuredangle D = \measuredangle MAC$, ומכאן, מהשלמה ל-$180^\circ$ נובע $\measuredangle CAB = 180^\circ - \measuredangle D$.

מכאן שהמרובע בר חסימה (ניתן לחסום מרובע במעגל אם ורק אם סכום זוג זוויות נגדיות שווה ל- 180°) (משל א2).

ב. נתון: שטח המשולש $\triangle MAC$ שווה לשטח המרובע $ABDC$.
מצא את היחס $\frac{BD}{AC}$.
חישוב: מהנתון נובע יחס שטחים של $1:2$ בין המשולשים הדומים $\frac{S_{\triangle MDB}}{S_{\triangle MAC}}$. מכאן שיחס הדמיון הוא $\sqrt{2}$. וזהו היחס $\frac{BD}{AC}$.

נתון: אלכסוני המרובע $ABDC$ מאונכים זה לזה, AD הוא קוטר במעגל החוסם את המרובע $ABCD$.

ג. הוכח כי המשולש $\triangle ABC$ הוא משולש שווה שוקיים.



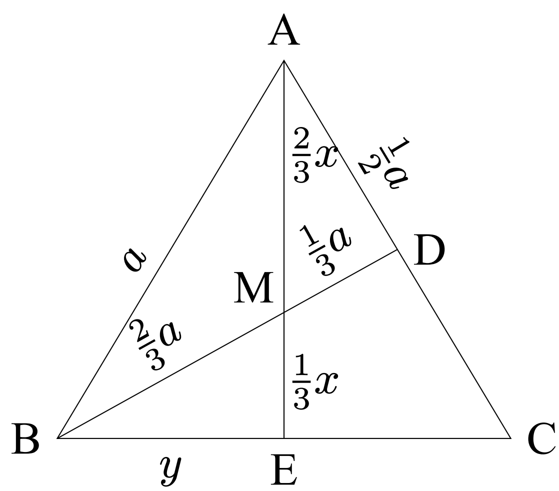
הוכחה: אנך למיתר חוצה אותו, ולכן $FB = FC$ (F מפגש האלכסונים ונתון ש-$\measuredangle F = 90°$). לכן, מצ.ז.צ $\triangle ABF \cong \triangle ACF$ וקיבלנו $AB = AC$, מש"ש כרצוי. מ.ש.ל. ג'.

שאלה 5

ABC הוא משולש שווה שוקיים שבו $AB = AC = a$ (ראה ציור). BD הוא תיכון במשולש ABC. נתון: $BD = a$. הנקודה M היא מפגש התיכונים במשולש ABC.

א. הבע את BC באמצעות a.

א) נבנה את התיכון AE ונסמנו ב-x. הנקודה m מחלקת את התיכונים ביחס $1:2$, ומכאן האורכים כפי שסומנו בשרטוט.



פיתגורס ב-$\triangle BMD$: $y^2 + \frac{1}{9}x^2 = \frac{4}{9}a^2 \rightarrow (1)\, 9y^2 + x^2 = 4a^2$

פיתגורס ב-$\triangle ABD$: $(2)\, y^2 + x^2 = a^2$

נחסר משוואות $(2) - (1)$ ונקבל:

$$8y^2 = 3a^2 \rightarrow 2y = \boxed{BC = \sqrt{\frac{3}{2}}a}$$

ב. חשב את זוויות המשולש $\triangle BMC$.

ב) נסמן $\measuredangle MBC = \alpha$

$$cos\alpha = \frac{y}{\frac{2}{3}a} = \frac{0.5\sqrt{1.5}\cancel{a}}{\frac{2}{3}\cancel{a}}$$

$$\alpha = cos^{-1}\left(\sqrt{1.5}\cdot\frac{3}{4}\right) = \boxed{23.28^\circ}$$

אלו הן שתי זוויות הבסיס של $\triangle BMC$ ומסכום זוויות מתקבלת הזווית $\boxed{\measuredangle BMC = 133.43^\circ}$

ג. נתון: $AM = 6$. **חשב את שטח המשולש** $\triangle ABC$.

ג) $AM = 6 \rightarrow x = 9$

$$\frac{\frac{1}{3}x}{sinx}cos\alpha = y = \frac{3}{tan\alpha} = 6.97$$

$$BC = 13.943$$

$$S = \frac{9BC}{2}\boxed{=_{\text{יח''ש}} 62.74}$$

בגרות 36

שאלה 4

AB הוא מיתר במעגל שמרכזו O. הרדיוס OC מקביל למיתר AB, במתואר בציור. BD הוא קוטר במעגל.

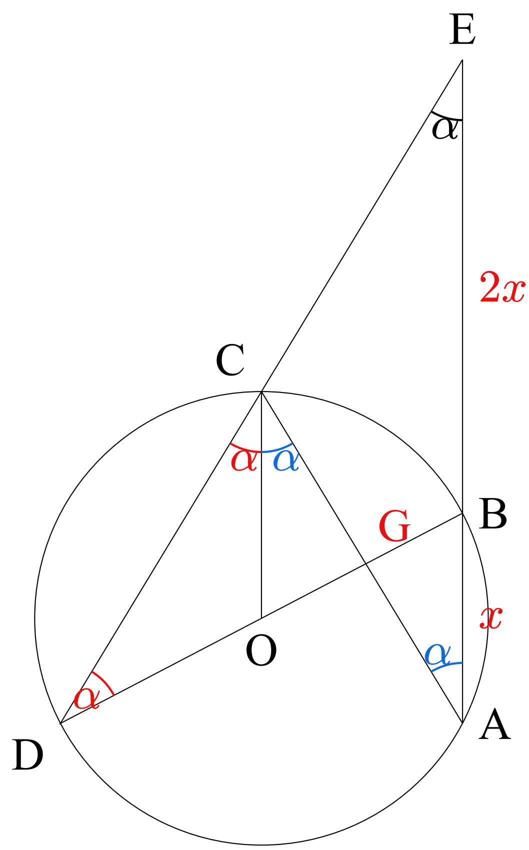
הנקודה Eהיא מפגש הישרים AB ו- DC.

א. הוכח: $\measuredangle AED = \measuredangle CDO$

הוכחה : סימון $\measuredangle AED = \alpha$

צ"ל $\measuredangle CDO = \alpha$

1. $\measuredangle DCO = \alpha$ (מתאימות בין מקבילים)
2. $OC = OD = R$ (רדיוסים).
3. $\boxed{\measuredangle CDO = \alpha}$ **מ.ש.ל א'** (מול צלעות שוות זוויות שוות).



ב. **הוכח** כי CO חוצה את הזווית DCA.

הוכחה: ההוכחה שקולה לכל מני דברים וכדאי לזהות מהם הדברים האלו: אחד מהם יהיה להראות ש- $\measuredangle CAE = \alpha$ (זו חשיבה לאחור).

זה אכן מתקיים שכן זו זווית היקפית לקשת $\overset{\frown}{BC}$ ומכאן שהיא שווה להיקפית $\measuredangle CDB$.

כלומר $\alpha \underbrace{=}_{\text{סעיף א}} \measuredangle CDO \underbrace{=}_{\text{אותה זווית}} \measuredangle CDB \underbrace{=}_{\text{היקפיות}} \measuredangle CAE$.

מכאן $\measuredangle CAE = \alpha$ כרצוי.

כיוון ש- $\measuredangle CAE = \measuredangle OCA$ (מתחלפות) וגם $\measuredangle DCO = \measuredangle CDO$,

נובע (מעבר) $\boxed{\measuredangle DCO = \measuredangle OCA}$ **(מ.ש.ל ב').**

ג,ד) נתון $2 = \frac{EB}{BA}$.

ג) הוכח כי המשולש $\triangle ABO$ הוא שווה צלעות.

ד) נתון: שטח הטרפז $COBE$ הוא 9. **מצא את סכום שטחי המשולשים:** $S_{\triangle COD} + S_{\triangle ABO}$.

ג) **הוכחה:** סימון $AB = x, EB = 2x$ (נובע המיחס הנתון).

שוב ננסה ללכת לאחור: אם זה שו"צ אז 3 הצלעות הן רדיוס. בעצם מה שחסר הוא הוכחת $x = R$. אז למה זה נכון?

זה נכון מפני ש- OC הוא ק"א ב-$\triangle DBE$ ולכן שווה למחצית EB, כלומר ל-$x = \underbrace{OC}_{R}$ כרצוי.

ד) (הגזימו בכמות הסעיפים): **חישוב:**

$9 \underbrace{=}_{\text{נתון}} 1.5xh = \underbrace{\frac{x+2x}{2} \cdot h}_{\text{נוסח שטח טרפז}} = S_{COBE}$ (כאשר h הוא הגובה מ-O ל- AE)

מהסעיף הקודם מתקיים $OC \overset{\parallel}{=} AB = R$ ולכן $ABCO$ מקבילית ואף מעוין. מכאן שהאלסונים $AC \perp BO$ וחוצים זה את זה. בפרט $CG = GA$ ואלו הם גבהים שווים במשולשים $\triangle COD, \triangle ABO$.

כיוון ש-$\triangle ABO$ שווה צלעות מתקיים גם $GA = h$ (שלושת הגבהים שווים במשולש שווה צלעות מטעמי סימטריה).

מכאן ששטחי שני המשולשים שווים: $S_{\triangle COD} = S_{\triangle ABO} = \frac{x \cdot h}{2} = 3$, **וסכומם לכן 6.**

$\boxed{S_{\triangle COD} + S_{\triangle ABO} = 6}$ **מ.ש.ל. ד'.**

בגרות 37

שאלה 5

הערה: להוסיף סרטוט.

ABC הוא משולש קהה זווית ($\measuredangle BAC > 90^\circ$).

נתון: $AB + AC = 4a$ (a הוא פרמטר), $AB : AC = 3 : 5$,

שטח המשולש ABC הוא $\frac{15\sqrt{3}}{16}a^2$

א1). חשב את גודל הזווית BAC.

פתרון:

$$AB + AC = 4a =^* 8x$$

*סימון: $AB = 3x, AC = 5x$ (כדי לקבל את היחס הרצוי).

$x = 0.5a$ ומכאן $AB = 1.5a,$ ו- $AC = 2.5a$.

$$S_{\triangle ABC} = \frac{2.5 \cdot 1.5 \cdot a^2 sin\alpha}{2} \overset{\text{נתון}}{=} \frac{15\sqrt{3}}{16}a^2$$

מתקבל $sin\alpha = \frac{30\sqrt{3}}{16 \cdot 2.5 \cdot 1.5}$ ומכאן

$$180 - \alpha = sin^{-1} = \left(\frac{30\sqrt{3}}{16 \cdot 2.5 \cdot 1.5}\right) = 60^\circ \to \alpha = 120^\circ = \measuredangle BAC$$

א2) חשב את גודלי הזווית $\measuredangle ABC$ ו-$\measuredangle ACB$.

פתרון: משפט קוסינוסים ב-$\triangle ABC$:

$$x = \sqrt{1.5^2a^2 + 2.5^2a^2 - 2 \cdot 1.5a \cdot 2.5a \cdot cos120}$$

$$x = a\sqrt{1.5^2 + 2.5^2 + 1.5 \cdot 2.5} = 3.5a = BC$$

ממשפט סינוסים $\boxed{\beta = 38.21^\circ} \leftarrow \frac{2.5sin120}{3.5} = sin\beta \leftarrow \frac{2.5a}{sin\beta} = \frac{3.5a}{sin120}$

ובאופן דומה: $\boxed{\gamma = 21.79^\circ} \leftarrow \frac{1.5sin120}{3.5} = sin\gamma$

הערה: ניתן לפתור גם את המשוואה $\frac{2.5}{sin(180-120-c)} = \frac{1.5}{sinC}$ עם זהות סכום זוויות, במקום משפט קוסינוסים.

במעגל החוסם את משולש ABC אפשר לחסום מחומש משוכלל ששטחו 100.

ב. חשב את a.

פתרון (להוסיף סרטוט של מצולע עם זוויות 72,54,54):

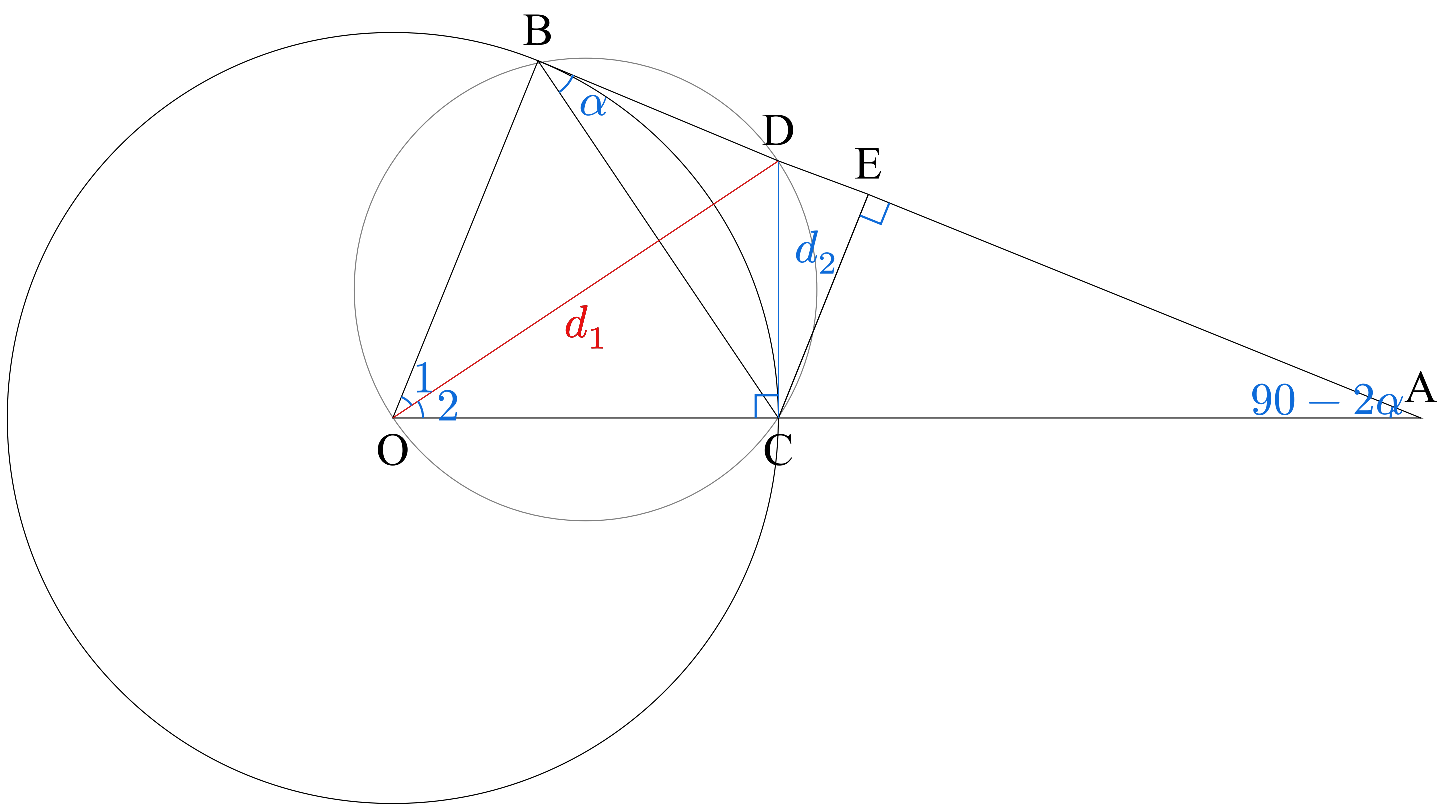
$5R^2sin54cos54 \ = \ 100$ (אם מורידים גובה לבסיס המש"ש שהשוש שלו R מתקבלת נוסחת השטח הזו). אפשר לחשב גם לפי $5\frac{R^2sin72}{2}$

כך או כך מתקבל $R = 6.48$ ומכאן ניתן לחשב את a:

$\frac{3.5a}{sin120} = 12.97 \rightarrow a = 3.209$

בגרות 40

ש5 עמ 221



א1) ניתן לחסום שכן $\measuredangle DCO = \measuredangle B = 90^\circ$ (רדיוס מאונך למשיק בנק ההשקה. אם במרובע זוג זוויות נגדיות שווה 180° המרובע בר חסימה במעגל).

א2) $OBDC$ דלתון (שני משיקים מאותה נקודה שווים זה לזה + רדיוסים $OB = OC$.

דלתון הגדרה: שני זוגות צלעות נגדיות זוות).

$OD \perp BC$ האלכסונים בדלתון מאונכים.

$\measuredangle DEC =^{*} \measuredangle DMC =^{**} \measuredangle 90^\circ$ (*נתון, ** האלכסונים בדלתון מאונכים זה לזה)

$MDEC$ בר חסימה (זוג זוויות נגדיות 180°) מ.ש.ל א2.

ב)

OD קוטר במעגל החוסם את $OBDC$ ולכן שווה ל- d_1 (זווית היקיפית בת 90° נשענת על קוטר).

DC קוטר במעגל החוסם את $MDEC$ ולכן שווה ל-d_2

$\measuredangle O = 2\alpha$ (כל זווית היקיפית הנשענת על BC שווה ל-α (זווית בין משיק למיתר) + במעגל, זווית היקפית שווה למחצית הזווית המרכזית הנשענת על אותה הקשת).

$\measuredangle BOC = \measuredangle O_2 = \measuredangle O_1 = \measuredangle BOD = 0.5\measuredangle O = \alpha$ (בדלתון האלכסון הראשי חוצה את הזוויות + סימון).

(טיעון קצר יותר: 3 הזוויות α הנ"ל היקפיות למיתרים שווים במעגל החוסם את $OBDC$).

$$\begin{cases} d_1 = OD = \boxed{\dfrac{R}{cos\alpha}} \\ d_2 = DC = DB = \frac{R}{\cos\alpha}\sin\alpha = \boxed{R\tan\alpha} \end{cases}$$ טריגו בסיסי.

ג) $\measuredangle A = 90^\circ - 2\alpha$ (סכום זוויות במשולש).

$d_3 = \frac{OD}{\sin(90-2\alpha)}$ משׁ' סינוסים ב-$\triangle ODA$.

$$\frac{\frac{R\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{R}{\cos\alpha}} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{d_1}{d_3} = \frac{\frac{d_1}{1}}{\frac{d_1}{\sin(90-2\alpha)}}$$

$$\sin\alpha = \sin(90-2\alpha)$$

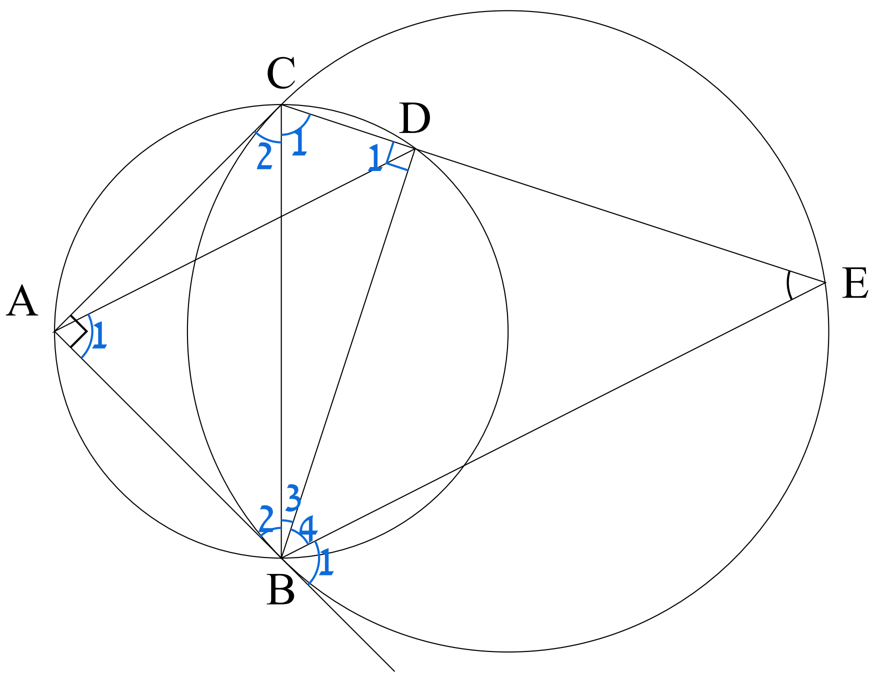
$$\alpha = 90 - 2\alpha \rightarrow 3\alpha = 90^\circ \rightarrow \boxed{\alpha = 30^\circ}$$

(הפתרון מהזהות $sinx = sin\left(180 - x\right)$ נפסל (מוביל לזווית שלילית).

בגרות 41

ש4 עמ' 229

הערה: יתכן בהחלט שיש פתרון יותר יעיל. זה הפתרון שמצאתי בלחץ זמן כדי לדמות בחינה (מדידה).



נסמן את הזוויות כמופיע בציור:

$$\measuredangle A_1 = \measuredangle BAD,\ \measuredangle C_1 = \measuredangle BCE,\ \measuredangle C_2 = \measuredangle ACB$$

$$\measuredangle B_2 = \measuredangle CBA,\ \measuredangle B_3 = \measuredangle DBC,\ \measuredangle B_4 = \measuredangle EBD$$

ו- $\measuredangle B_1$ המשלימה של $\measuredangle B$ ל-180°.

הוכחה:

1. $\measuredangle D_1 = 90^\circ$ משלימה את $\measuredangle A$ ל-180° (סכום זוויות נגדיות במרובע חסום במעגל הוא 180°).

2. $\measuredangle B_1 = \measuredangle C_1,\ \measuredangle E = \measuredangle C_2$ (בין משיק למיתר).

3. $\measuredangle B_2 = \measuredangle C_2$ (שכן $AB = AC$, זוג משיקים למעגל היוצאים מנקודה אחת שווים + במשולש מול צלעות שוות זוויות זוות).

4. $\measuredangle C_1 + \measuredangle C_2 + \measuredangle B_2 + \measuredangle B_3 = 180^\circ$ (סכום זוויות נגדיות במרובע חסום).

5. $\underbrace{\measuredangle B_1}_{\measuredangle C_1} + \measuredangle B_4 + \measuredangle B_2 + \measuredangle B_3 = 180^\circ$ ($\measuredangle B$ שטוחה)

6. מחיסור המשוואות 4,5 מתקבל $\measuredangle C_2 = \measuredangle B_4$

7. $\measuredangle E = \measuredangle B_4$ (כלל מעבר ט' 2,6)

8. $DE = DB$ מ.ש.ל א' (במשולש מול זוויות שוות צלעות שוות).

9. מתקבל גם $\measuredangle B_4 = \measuredangle E = \measuredangle C_2 = \measuredangle B_2 =^* 45^\circ$ (*שכן $\triangle ABC$ ישר זווית שו"ש).

ב)

10. $\measuredangle B_3 + \measuredangle B_4 = \measuredangle B_3 + \measuredangle B_2$ (ט' 9 + חיבור זווית שווה לזוויות שוות). זו זווית דומה אחת לצורך דמיון ז.ז.

11. $\measuredangle C_1 = \measuredangle A_1$ (זוויות היקפיות הנשענות על אותו מיתר DB שוות).

12. $\triangle ADB \sim \triangle CEB$ דמיון זווית זווית, מ.ש.ל ב'.

ג)

13. יחס הצלעות $\frac{CB}{AB}$ הוא $\sqrt{2}$ (פיתגורס במש"ש ישר זווית $\triangle ABC$ או $\frac{AB}{CB} = sin(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \frac{CB}{AB} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$)

14. זהו גם יחס הדמיון במשולשים הדומים מסעיף ב' ומכאן שיחס השטחים (ריבוע יחס הדמיון) הוא $2 : 1$ כרצוי. מ.ש.ל ג'.

בגרות 571 #23 5ש