קיצון 571

גיא סידס

10 במרץ 2025

תוכן העניינים

בעיות קיצון

בגרות 28 ש8 עמ' 130

$f\left(x\right)=\frac{1}{x^{3}}$ ורוצים מינימום של ניצבי המשולש שיוצר המשיק לפונקציה עם הצירים. וגם מקסימום, בהינתן שנקודת ההשקה בתחום $1\leqslant t\leqslant5$.

אז מה עושים עם זה?????

כרגע ברור שמשוואת המשיק בנקודה t היא

$$y-\frac{1}{t^{3}}=m\left(x-t\right)$$

אז חסר רק השיפוע... הנגזרת היא $y'\left(t\right)=-\frac{3}{t^{4}}$ ומכאן שהמשואה היא:

$$y-\frac{1}{t^{3}}=-\frac{3}{t^{4}}\left(x-t\right)$$

שיעור ה-y בחיתוך עם y הוא $y(0)=\frac{1}{t^{3}}-\frac{3}{t^{4}}\left(-t\right)=\boxed{\frac{4}{t^{3}}}$

ושיעור ה-x בחיתוך עם ציר xההוא:

$$\begin{aligned}
y=0 & =\frac{1}{t^{3}}-\frac{3}{t^{4}}\left(x-t\right)/\cdot t^{4}\\
0 & =t-3\left(x-t\right)\\
3x & =4t\\
x & =\boxed{\frac{4t}{3}}
\end{aligned}$$

פונקציית המטרה היא סכום הניצבים ולכן פונקציית המטרה:

$$V(t) = \frac{4t}{3} + \frac{4}{t^3}$$
$$V' = \frac{4}{3} - \frac{12}{t^4}$$
$$V' = 0 \rightarrow t^4 = 9 \rightarrow \boxed{\underbrace{t = +\sqrt{3}}_{\text{השלילי לא בת"ה}}}$$

חשודה לקיצון $x = \sqrt{3}$. טבלה קצרה תראה שזו נקודת מינימום.

אז מה קורה עם סעיף ב'???? זה טיפה סעיף חשיבה.

אין לנו חשודות נוספות לקיצון. לכן יש לבדוק את ערכה של פונקציית המטרה בשני הקצוות. הערך עבור $t = 5$ גדול מזה שמתקבל עבור $t = 1$ ולכן זה שיעור המקסימום (קיצון קצה).

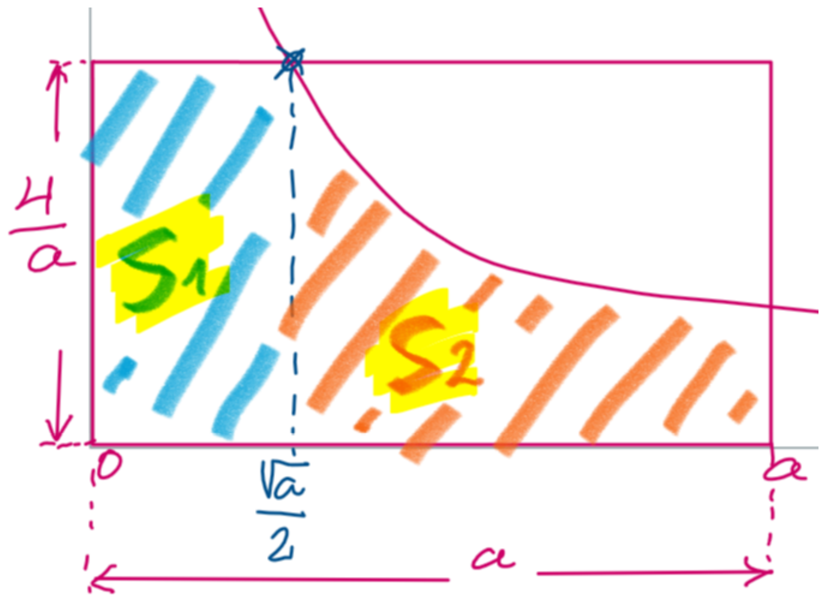
בגרות 30 ש8 עמ' 145 (לא במיקוד תשפ"ה)

$f(x) = \frac{1}{x^2}$, $a \geqslant \frac{1}{4}$

כיון ששטח המלבן 4 נובע שגובהו $\frac{4}{a}$. נחשב את נקודת החיתוך עם הפונקציה:

$$\frac{1}{x^2} = \frac{4}{a} \rightarrow x^2 = \frac{a}{4}$$

$x = \frac{\sqrt{a}}{2}$. נצייר את הנתונים החדשים שקיבלנו:



ונחשב את השטחים:

$$S_1 = \frac{\sqrt{a}}{4} \cdot \frac{4}{a} = \frac{2}{\sqrt{a}}, \qquad S_2 = \int_{\frac{2}{\sqrt{a}}}^{a} \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{\frac{2}{\sqrt{a}}}^{a} = \frac{-1}{a} + \frac{2}{\sqrt{a}}$$

$$S\left(a\right) = S_1 + S_2 = \frac{4}{\sqrt{a}} - \frac{1}{a} = 4a^{-0.5} - a^{-1}$$

הסוף של הרישום לעיל הוא מעבר מכוון במטרה לפשט את הגזירה (נגזרת מנה, עדיף להימנע).

הנגזרת תהא לפי a. הפעם זה לא סתם מספר... למי שנח לו יותר, ניתן לרשום x.

$$S'\left(a\right) = -2a^{-1.5} + a^{-2}$$

$$S' = 0 \to \frac{1}{a^2} = \frac{2}{a^{1.5}} / \cdot a^{1.5}$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = 2 \to \sqrt{a} = \frac{1}{2} \to \boxed{a = \frac{1}{4}}$$

בדיקת מקסימום:

$$S'(1) = \frac{-2}{1^{1.5}} + \frac{1}{1^2} < 0$$ כרצוי

(לא בודק צד שני שכן מחוץ לתחום).

בגרות 34 ש8 עמ 172 (לא במיקוד תשפ"ה)

שיעור 10/1/23.

נתונה $f\left(x\right)=-x^{2}+1$

בנקודה $x=t$ $\left(0<t<1\right)$ מעבירים משיק. נראה כי משוואתו היא $y=-2tx+t^{2}+1$:

הנגזרת: $f'\left(x\right)=-2x$ נציב את t אז השיפוע בנקודה הוא:

$f'(t)=-2t$.

נחשב את הנקודה: $f(t)=-t^{2}+1\rightarrow\left(t,-t^{2}+1\right)$

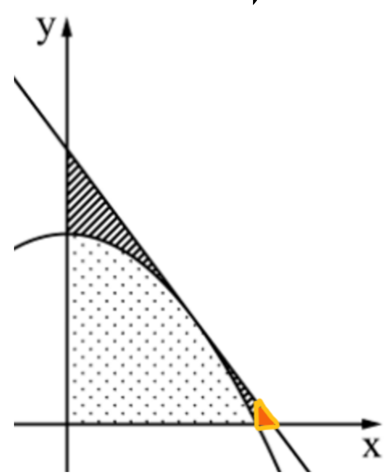
נחשב משוואת משיק לפי $Y-y_{1}=m\left(X-x_{1}\right)$

$$y-\left(-t^{2}+1\right)=-2t\left(x-t\right)$$

$$y+t^{2}=-2tx+2t^{2}+1$$

$$\boxed{y=-2tx+t^{2}+1}$$

ב. פתרון שעובד לא טוב בכלל פיצול שטחים (פתרון טוב = בהמשך):



נמצא פונקציית מטרה המייצגת את השטח S (בין הישר לבין הפונקציה)

$$S=\int_{0}^{1}\left(-2tx+t^{2}+1-\left(-x^{2}+1\right)\right)dx+S_{\triangle}$$

נחשב S משולש: נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה-x היא:

$y=-2tx+t^{2}+1=0$. טיפה מבלבל - אך יש לבודד את x.

$$2tx=t^2+1\to x=\frac{t^2+1}{2t}$$

$$S\triangle=\frac{\left(\frac{t^2+1}{2t}-1\right)\cdot h}{2}=\frac{\left(\frac{t^2-2t+1}{2t}\right)\cdot\left(-2t\cdot 1+t^2+1\right)}{2}=\frac{(t-1)^4}{4t}$$

הערה: זה מסתבך ולכן עדיף לפתור בדרך מעט שונה!!! (בשלבים האלו עם נוסחת שטח טיפה שונה **פרשתי לדרך החלופית המוצגת למטה**).

האינטגרל (לא כולל משולש):

$$\int_0^1 x^2-2tx+t^2dx=\left|\frac{x^3}{3}-tx^2+t^2x\right|_0^1=\frac{1}{3}-t+t^2-(0)$$

אבל בכל מקרה קרוב לוודאי שלא נדע לאפס את הנגזרת של פונקציית מטרה הכוללת את שטח המשולש.

מרגע שצפוייה משוואה ממעלה 3 קרוב לוודאי שיש בעייה. אנו לא יודעים לפתור משוואה כזו (ברוב המקרים), וניתן להסיק שיש טעות!!!

$$S=\frac{1}{3}-t+t^2+\frac{(t-1)^4}{4t}$$

$$S'=-1+2t+\frac{4(t-1)^3\cdot 4t-4(t-1)^4}{16t^2}=$$

$$S'=\frac{-16t^2+32t^3+(t-1)^3(16t-4t+4)}{16t^2}$$

ב. ננקוט דרך פשוטה יותר: נשים לב כי השטח מתחת לפרבולה קבוע ולכן השטח המינימאלי יתקיים כאשר שטח המשולש (העוטף את הפרבולה) מינימאלי.

לכן נחשב את שטח המשולש לפי שיעורי חיתוך עם הצירים:

חיתוך עם ציר ה-x כבר מצאנו:

$$\boxed{x=\frac{t^2+1}{2t}}$$

חיתוך עם ציר y: $y(0)=t^2+1$ ובסה"כ שטח המשולש:

$$S_\triangle=\frac{\left(t^2+1\right)^2}{4t}$$

$$S'_\triangle=\frac{2(t^2+1)\cdot 2t\cdot 4t-4\left(t^2+1\right)^2}{16t^2}=\frac{(16t^2-4t^2-4)(t^2+1)}{16t^2}=\frac{(12t^2-4)(t^2+1)}{16t^2}$$

$S'_{\triangle}=0 \to 12t^2-4=0 \to \boxed{t=\frac{1}{\sqrt{3}}}$ (הפתרון השלילי מחוץ לת"ה).

לגבי סימני נגזרת די אם ננתח את סימן הביטוי $12t^2-4$:

$S'(1)>0 \wedge S'(0.5)<0$ ולכן שיעור ה-t שקיבלנו מייצג נקודת מינימום בפונקציה המטרה (בה שטח המשולש מינמאלי, ולכן גם השטח המקווקו מינימאלי).

ג. ניתוח טענות: טענה i נכונה כיוון ש-A קבוע, אז כאשר S מינימאלי, היחס $\frac{A}{S}$ הוא מקסימאלי.

לעומת זאת טענה ii שגויה. כיוון של- S אין מקסימום. קיימים משולשים בשטח אינסופי בקצות התחום, וליתר דיוק לתחום אין בכלל קצוות. זוהי תכונה של קטע פתוח $(0,1)$ בשונה מקטע סגור $[0,1]$.

למי שעניין האינסופיות בקטע הפתוח לא ברור - נא להציף את זה בשיעור.

בגרות 37 ש8 עמ 197

נתונה הפונקציה $f\left(x\right)=\frac{4}{\sqrt{x}}$

א1) מבין כל הנקודות שעל גרף הפונקציה יש למצוא את שיעורי הנקודה הקרובה ביותר לראשית הצירים (שתסומן A)

נרשום פונקצית מטרה המייצגת את מרחק נקודה $\left(t,f(t)\right)$

$T=\sqrt{t^{2}+\left(\frac{4}{\sqrt{x}}\right)^{2}}$. למציאת הקיצון די אם נחשב קיצון של ריבוע המרחק (שיעורי הקיצון לא ישתנו. אם ריבוע המרחק מינימאלי גם המרחק מינימאלי).

$$\left(T^{2}\right)^{\prime}=\left(t^{2}+\frac{16}{t}\right)^{\prime}=2t-\frac{16}{t^{2}}=0$$

$$2t^{3}=16\rightarrow t=2$$

והנקודה הקרובה ביותר היא $A\left(2,2\sqrt{2}\right)$. זהו מינימום שכן בקצוות (באינסוף) המרחק שואף לאינסוף. לכן ניתן להסתפק בנימוק זה ללא טבלה או הצבות.

א2) האם הישר OA מאונך למשיק? כן. נוכיח $f^{\prime}\left(2\right)=\frac{-1}{m_{AO}}$

$$m_{AO}=\frac{\frac{4}{\sqrt{2}}}{2}=\sqrt{2}$$

$$f^{\prime}\left(x\right)=-\frac{1}{2}\cdot4x^{-1.5}\rightarrow f^{\prime}\left(2\right)=-2\cdot2^{-1.5}=\frac{-2}{\sqrt{2^{3}}}=\frac{-1}{\sqrt{2}}=\frac{-1}{m_{AO}}$$

ב1) מטעמי סימטריה הנקודה הקרובה ביותר היא $\left(-2,-2\sqrt{2}\right)$.

ב2) יש לבדוק את שני הקצוות (כיוון שהמינימום באמצע ואין עוד נקודות קיצון, המקסימום בהכרח בקצוות.

$$T^{2}=dist^{2}=\left(-x\right)^{2}+\frac{16}{-x}$$

$$T^{2}\left(-1\right)=1+\frac{16}{1}=17$$

$$T^{2}\left(-4\right)=16+\frac{16}{4}=20\rightarrow\left(-4,-2\right))$$

אם ריבוע המרחק מקסימלי גם המרחק מקסימלי.

בגרות 38 ש8 עמ'205

נתונה $f\left(x\right)=1-\frac{2}{x+1}$ המוגדרת עבור $x\neq-1$ אס' אנכית $x=-1$ ואופקית $y=1, x\rightarrow\pm\infty$

$f'\left(x\right)=\frac{2}{\left(x+1\right)^{2}}\underset{\text{בת"ה}}{>}0\Longrightarrow$

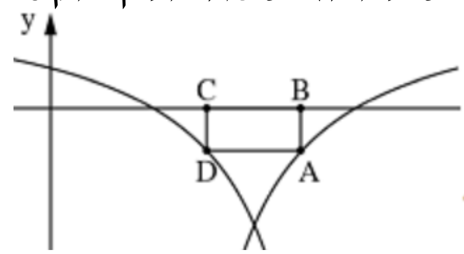
עליה: $x<-1\vee x>-1$ ירידה: אין

בגרות 41 ש8 עמ 232

שיעור קיצון ראשון/שני (אחרי שפותרים שאלה מ-382, ומ-481)

נתונות $f(x)=\frac{x-1}{x-3}, \quad g(x)=\frac{x-3}{x-1}$

ויש למצוא שטח מלבן מקסימלי. השאלה כוללת שלבי הנחייה ברורים.



,

א)1) ת"ה $f(x)$ הוא $x\neq 3$.

ת"ה $g(x)$ הוא $x\neq 1$

א)2)חיתוך ציר x:

$$g(x)=0\to x=3\to(3,0)$$

$$f(x)=0\to x=1\to(1,0)$$

חיתוך ציר y: $\left(0,\frac{1}{3}\right)\to f(0)=\frac{1}{3}$, $(0,3)\to g(0)=3$ (חיתוך g עם ציר y סתם מבלבל הפונקציות אינן מוצגות במלואן בשרטוט!!!).

ב. תחום הערכים האפשרי של t: נמצא חיתוך של $g(x)=f(x)$:

$$(x-3)^2=(x-1)^2$$

$x-3=\pm(x-1)$ ורק גרסה אחת של השוויון נפתרת:

$$x-3=-x+1$$

$2x=4\to x=2$ ומכאן שתחום ערכי t הוא $\boxed{2<t<3}$

ג)1) $DistAB=g(t)=\left|\frac{t-3}{t-1}\right|=\boxed{\dfrac{3-t}{t-1}}$ (בתחום שלנו צריך להפוך סימן).

ג)2) נמצא את שיעור ה-x של הנקודה D ע"י הצבת $f(x)=\frac{t-3}{t-1}$:

$\frac{x-1}{x-3} = \frac{t-3}{t-1}$

$(x-1)(t-1) = (t-3)\,(x-3) \to \cancel{xt} - t - x + 1 = \cancel{xt} - 3x - 3t + 9$

$2x = -2t + 8$

$x = 4 - t$ כרצוי.

ג(3) נבטא את שטח המלבן :

$S(t)_{\text{מלבן}} = height \cdot width = -\left(\frac{t-3}{t-1}\right)(t - (-t+4)) = \frac{3-t}{t-1}\,(2t-4)$

$S(t)_{\text{מלבן}} = \frac{6t-2t^2-12+4t}{t-1} = \boxed{\frac{-2t^2+10t-12}{t-1}}$

ד) נחפש קיצון :

$S'(t) = \frac{(-4t+10)(t-1)-1\cdot(-2t^2+10t-12)}{(t-1)^2}$

$S'(t) = 0 \to -4t^2\cancel{+10t} + 4t - 10 + 2t^2\cancel{-10t} + 12 = 0$

$-2t^2 + 4t + 2 = 0$

$t_{1,2} = 1+\sqrt{2}, \cancel{1-\sqrt{2}}$ (השלילי מחוץ לת"ה).

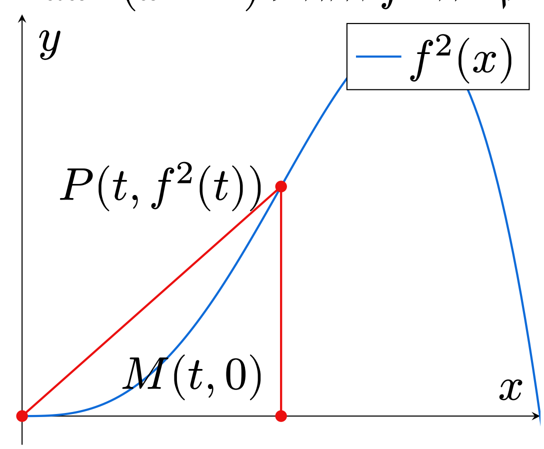
וזהו מקסימום כיוון שבקצוות התחום מקבלים מלבן מנוון בשטח 0, והפונקציה רציפה בתחום $2 < t < 3$. (בזמן בחינה כדי שלא יצא שניפנפתם ניפנופי ידיים , תעשו טבלה).

בגרות 42 (571 עמ 109)

א. מת"ה $4 \leqslant x \leqslant 0$ נובע ש $(4,0)\,,(0,0)$ נקודות האפס של $x^3\left(ax+b\right)$ וכיוון ש-0 מאפס את x^3 4 חייב לאפס את הביטוי השני: $\boxed{b=-4a} \Longleftarrow a\cdot 4+b=0$.

א2. לאחר הצבה, הארגומנט של השורש הוא $ax^3\left(x-4\right)$. נציב $x=2$: $2^3\left(2-4\right)=-16<0$. לכן הביטוי כולו חיובי בת"ה רק עבור $a<0$. מכאן שטענה II נכונה.

ב. הפונקציה f^2 זהה ל $ax^3\left(x-4\right)$ כשהוא מצומצם לת"ה של f.



$$S_{\triangle PMO}=0.5t\left(at^4-4at^3\right)=0.5a\left(t^5-4t^4\right)$$

$$S'=0.5a\left(5t^4-16t^3\right)$$

$$S'=0\Longrightarrow 5t^4=16t^3\Longrightarrow t=\boxed{x=\frac{16}{5}}$$

וזהו שיעור מקסימום שכן ערך הפונקציה גדול מערכה עבור $x=0$ והיא רציפה.

ג. $0.5a\left(\left(\frac{16}{5}\right)^5-4\left(\frac{16}{5}\right)^4\right)=\boxed{-41.943a}$

ד. מדובר בשיעור ה-x_{max} של f^2 שכן בתחום העליה, ככל ש-x גדל, גדלים שני הניצבים

ולהן גם השטח גדל (רק אחרי נקודת הקיצון ניצב אחד גדל ואחד קטן).

$$\left(ax^3\left(x-4\right)\right)' = a\left(4x^3-12x^2\right)a\cdot 4x^2\left(x-3\right)=0 \Longrightarrow \boxed{x=3}$$

קיצון גיאומטריות

בגרות 12 ש8 עמ 50

מחלקים חוט שאורכו k לשני חלקים (לאו דווקא חלקים שווים). מחלק אחד של החוט יוצרים מעגל ומהחלק האחר יוצרים ריבוע. סכום השטחים של שתי הצורות הוא מינימלי כאשר היקף המעגל הוא $\frac{5\pi}{\pi+4}$. מצא את הערך של k.

בשלב ראשון יש להתעלם מהנתון המספרי ולברר באיזה יחס לחלק את k כדי לקבל שטח מינימאלי.

נגדיר את החלק xk עבור העיגול ואת החלק $k\left(1-x\right)$ עבור הריבוע $0<x<1$.

$$\text{היקף המעגל} = xk = 2\pi r \rightarrow r = \frac{xk}{2\pi}$$

$$S_{\text{מעגל}} = \pi r^2 = \frac{x^2k^2}{4\pi}$$

$$S_{\text{ריבוע}} = \left(\frac{(1-x)k}{4}\right)^2 = \frac{(k-xk)^2}{16}$$

$$S_{\text{כולל}} = \frac{x^2k^2}{4\pi} + \frac{(k-xk)^2}{16}$$

זוהי פונקציה המטרה. נגזור אותה כדי למצוא לה קיצון.

$$S' = \frac{xk^2}{2\pi} + \frac{\cancel{2}(k-xk)\cdot(-k)}{\cancel{16}\ 8} =$$

$$S' = \frac{4xk^2+\pi(xk^2-k^2)}{8\pi}$$

$$S' = 0 \rightarrow k^2\left(4x+\pi x-\pi\right) = 0$$

$$x\left(4+pi\right) = \pi \rightarrow x = \frac{\pi}{4+\pi}$$

ההיקף הנתון $\frac{5\pi}{\pi+4}$ שווה כפי שהגדרנו ל- kx

כלומר $\frac{5\pi}{4+\pi} = \frac{\pi}{4+\pi}$ ולכן $k=5$.

בגרות 29 ש8 עמ 136

א. ניתן לראות לפי תאלס הרחבה 1 כי מתקיים :

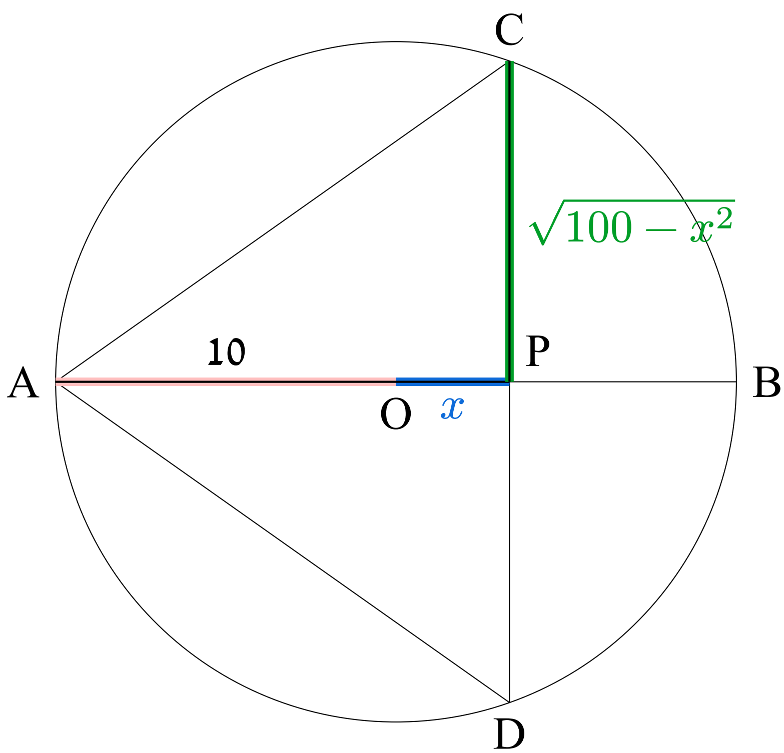
$$\frac{x}{6}=\frac{h}{h+6}$$

כעת נבודד את h

$$\begin{aligned} xh+6x &= 6h \\ 6x &= h\left(6-x\right) \\ \frac{6x}{6-x} &= h \end{aligned}$$

בגרות 33 ש7 עמ 165

נתון מעגל ובו קוטר AB. רדיוס המעגל הוא 10. הנקודה P נמצאת על הקוטר AB. בין מרכז המעגל ובין הנקודה B. דרך הנקודה P מעבירים אנך ל-AB החותך את המעגל בנקודות C ו-D . מצא את השטח המקסימלי של המשולש ACD.



נסמן את $OP = x$ ונגדיר נוסחה לשטח המשולש:

מפיתגורס נובע $PC = \sqrt{100-x^2}$

ולכן השטח $S_{\triangle ACD} = \frac{(10+x)\cdot\cancel{2}\cdot\sqrt{100-x^2}}{\cancel{2}}$

נגזור למציאת קיצון:

$$S' = \sqrt{100-x^2} + \frac{10+x}{\cancel{2}\sqrt{100-x^2}}\cdot\left(\overset{-1}{\cancel{-2}}\right)x =$$

$$S' = \frac{100-x^2-10x-x^2}{\sqrt{100-x^2}} = \frac{-2x^2-10x+100}{\sqrt{100-x^2}}$$

$$S' = 0 \rightarrow -2x^2-10x+100 = 0 \rightarrow x_{1,2} = 5, \cancel{-10}$$

ב-$x=\pm10$ המשולש מנוון ושטחו 0. לכן, מרציפות $x=5$ הוא שיעור של קיצון מקסימום.

אם יש ספק בנוגע לטיעון הלוגי, יש להראות הצבה של ערכים וסימני נגזרת.

השטח הוא $S(5) = 15\sqrt{100-25} = \boxed{75\sqrt{3}}$.

נשים לב כי זהו משולש שווה צלעות.

זה מזכיר שתי תופעות שלא נוכיח: 1) מבין כל המצולעים בעלי n צלעות $a_1, a_2, \dots a_n$ המצולע החסום במעגל הוא בעל השטח הגדול ביותר. 2) מבין כל המצולעים החסומים בעלי n צלעות, המצולע המשוכלל (שצלעותיו שוות). הוא בעל השטח הגדול ביותר.

בגרות 40 ש8 עמ 224 (לא במיקוד תשפ"ה)

במשולש ABC אורך הצלע BC הוא a. נתון $\measuredangle BAC = \alpha$ (α ברדיאנים). נסמן $\measuredangle ABC =$ x $(0 < x < \pi - \alpha)$

א. הבע באמצעות x, α את היקף המשולש ABC.

פתרון: $\frac{AC}{sinx} = \frac{a}{sin\alpha} \rightarrow AC = \frac{asinx}{sin\alpha}$

ובאופן דומה $AB = \frac{asin(\pi-(x+\alpha))}{sin\alpha} =^{*} \frac{a}{sin\alpha}sin\left(x+\alpha\right)$

*זהות $sinx = sin\left(180^{\circ} - x\right)$

ההיקף $T\left(x\right) = a + \frac{a}{sin\alpha}sinx + \frac{a}{sin\alpha}sin\left(x+\alpha\right)$

$$T'\left(x\right) = \frac{a}{sin\alpha}cosx + \frac{a}{sin\alpha}cos\left(x+\alpha\right) =$$

$$= \frac{a}{sin\alpha}\left(cosx + cos\left(x+\alpha\right)\right)$$

(נשים לב שזו גזירה לפי x ולכן α ו-a הם סתם מספרים עבורינו. **זו לא נגזרת מנה!!!**)

$$T' = 0 \rightarrow cosx = -cos\left(x+\alpha\right)$$

מזהות טריגו $cosx = -cos\left(\pi - x\right)$ נקבל:

$\pi - x = \pm\left(x+\alpha\right)$ (וניקח רק את החיובי. השלילי לא פותר).

$$\pi - \alpha = 2x$$

$x = \frac{\pi-\alpha}{2}$. (הראינו גם פתרון באמצעות נוסחת סכום $\left[cos\alpha + cos\beta = 2cos\frac{\alpha+\beta}{2}cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right]$.

בשני המקרים התוצאה זהה כמובן.

ראינו בשיעור כי הוכחת סימני נגזרת כאן היא די קשה.

בבחינה על דבר כזה ניתן לכתוב שלא הספקנו ואמור לצאת כך וכך...

דוגמא להצבות:

X	$\frac{\pi-\alpha}{4}$	$\frac{\pi-\alpha}{2}$	$\frac{\pi-\alpha}{1.5}$		
T'	?+	0	?-		
T					

צ"ל כי $T'\left(\frac{\pi-\alpha}{4}\right) > 0$ (בשיעור הראינו על המכפלה מנוסחת סכום זוויות. נדגים כאן על

הנוסחה השנייה)

$$T'\left(\frac{\pi-\alpha}{4}\right)=\frac{a}{sin\alpha}\left(cos\frac{\pi-\alpha}{4}+cos\left(\frac{\pi-\alpha}{4}+\alpha\right)\right)$$

$cos\frac{\pi-\alpha}{4}>0$ לכל α בתחום $[0,\pi]$ (אנו ברביע הראשון של המעגל הטריגונומטרי).

$cos\left(\frac{\pi-\alpha}{4}+\alpha\right)=cos\left(\frac{\pi+3\alpha}{4}\right)\ ?\lesseqgtr 0$ יכול להיות גם שלילי... לכן ההוכחה מתקבלת רק מהצבות בנוסחה של סכום (שראינו בכיתה).

(להוסיף כאן את הפתרון...)

הערה: דרך נוספת היא לטעון שבקצות התחום, כאשר אחת הצלעות שואפת ל-0, הצלע האחרת שואפת ל-a וההיקף שואף ל-$2a$.

לעומת זאת ההיקף כאשר המשולש אינו מנוון הוא בהכרח יותר מ-$2a$ שכן סכום 2 צלעות במשולש גדול מהצלע השלישית.