חקירת פונקציות שורש

גיא סידס

16 בינואר 2025

תוכן העניינים

פונקציות שורש - גורן 2ב

2ב 149/25 $y=x^2\sqrt{x+a}$

זוהי שאלה בה הפרמטר נשאר.

א. ת"ה $\boxed{x\geqslant -a}$ $x+a\geqslant 0\to$

נחפש נקודות חשודות לקיצון:

$$y'=\overbrace{2x}^{u'}\overbrace{\sqrt{x+a}}^{v}+\overbrace{x^2}^{u}\overbrace{\frac{1}{2\sqrt{x+a}}}^{v'}$$

$$y'=\frac{2x\cdot 2(x+a)+x^2}{2\sqrt{x+a}}=\frac{5x^2+4xa}{2\sqrt{x+a}}=\boxed{\frac{x\,(5x+4a)}{2\sqrt{x+a}}}$$ בדוקה

הנגזרת מוגדרת לכל $x>-a$ (בשונה מהפונקציה שמוגדרת גם עבור $x=-a$)

נחפש התאפסות של המונה (נוציא גורם משותף). המכנה תמיד חיובי בת"ה.

$$y'=0\to\underset{\substack{\Downarrow\\ x=0}}{x}\ \underset{\substack{\Downarrow\\ x=-\frac{4a}{5}}}{(5x+4a)}=0$$

שני שיעורי ה-x בת"ה ולכן חשודים לקיצון.

נכין טבלה הכוללת פרמטר עם הערכים $-a,\frac{-4a}{5},0$:

x	$x<-a$	$-a$	$-\frac{4.5}{5}a$	$-\frac{4}{5}a$	$-\frac{1}{5}a$	0	1
y'			$+$	0	$-$	0	$+$
y		$(-a,0)$ min	$\nearrow$	$(-\frac{4}{5}a,\_)$ max	$\searrow$	$(0,0)$ min	$\nearrow$

$$y'(-\tfrac{5}{6}a)=-\tfrac{4.5}{5}a(\cancel{5}\cdot\tfrac{-4.5}{\cancel{5}}a+4a)=-\tfrac{4.5}{5}a(-\tfrac{1}{2}a)>0$$ מונה

$$y'(-\tfrac{1}{5}a)=-\tfrac{1}{5}a(\cancel{5}\cdot\tfrac{-1}{\cancel{5}}a+4a)=-\tfrac{1}{5}a(3a)<0$$

$$y'(1)=(5+4a)>0$$

נחשב את ערך ה-y בנק' המקסימום:

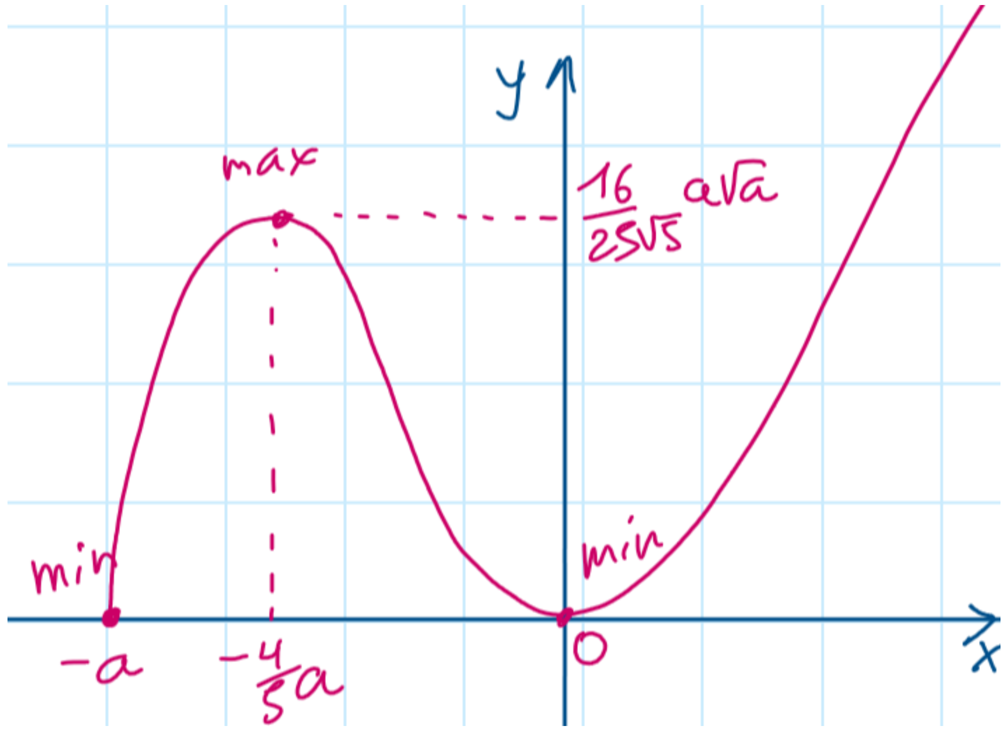
$$y_{max}=y(-\tfrac{4}{5}a)=\left(-\tfrac{4}{5}a\right)^2\sqrt{-\tfrac{4}{5}a+a}=\tfrac{16}{25}a^2\sqrt{\tfrac{1}{5}a}=\boxed{\frac{16}{25\sqrt{5}}a\sqrt{a}}$$

ב. נקודת מינימום קצה: $(-a,0)$, מינימום: $(0,0)$, מקסימום: $\left(-\frac{4}{5}a,\frac{16}{25\sqrt{5}}a\sqrt{a}\right)$

ג. תחום עליה: $-a\leqslant x<-\frac{4}{5}a\ \vee\ x>0$ (שימו לב שזה ממשיך עד $+\infty$. זה לא נעצר ב-1).

תחום ירידה : $-\frac{4}{5}a<x<0$

1. סקיצה :



$f(x)=\frac{4x}{b\sqrt{x}-3}$:156/7

נתון כי שיפוע המשיק כאשר $x=1$ הוא -2.5.

א. נמצא את ערכי b באמצעות גזירה, והצבה $f'(1)=-2.5$

$$f'=\frac{\overset{u'}{4}\left(b\sqrt{x}-3\right)-4x\overbrace{b\frac{1}{2\sqrt{x}}}^{v'}}{\left(b\sqrt{x}-3\right)^2}$$

נציב את $f'(1)=2.5$:

$$f'(1)=-2.5=\frac{4\left(b\sqrt{1}-3\right)-4\cdot1\cdot b\frac{1}{2\sqrt{1}}}{\left(b\sqrt{1}-3\right)^2}=\frac{\overbrace{4b-12-\frac{\cancel{4}^{2}b}{\cancel{2}}}^{2b-12}}{(b-3)^2}\ /\cdot(b-3)^2$$

$$-2.5\left(b-3\right)^2=2b-12$$

$$-2.5b^2+2.5\cdot6b-2.5\cdot9=2b-12$$

$$-2.5b^2+13b-10.5=0\to\boxed{b=1\ \vee\ b=4.2}$$

ב. ניקח את $b=1$ כמבוקש, ונמשיך לחקור. נרשום שוב את הפונקציה אותה אנו חוקרים:

$$\boxed{f(x)=\frac{4x}{\sqrt{x}-3}}$$

(1) ת"ה: תחום ההגדרה שקול לקבוצת האמת של המערכת: $\sqrt{x}-3\neq0\wedge x\geqslant0$

נפתור ונקבל $0\leqslant x\neq9$ שרצוי לכתוב כך:

$$\boxed{0\leqslant x<9\ \vee\ x>9}$$

(2) חתוך עם הצירים $\boxed{(0,0)}$ $f(x)=0\to4x=0\to x=0\to$

(ואין צורך להמשיך לבדוק עם ציר ה-y)

(4) חשד לקיצון: כבר גזרנו (נותר להחליף את b ולסדר את הנגזרת):

$$f'(x)=\frac{4(\sqrt{x}-3)-\cancel{4}^{2}x\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}-3)^2}=\frac{\frac{4\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}-12\sqrt{x}-2x}{\sqrt{x}}}{\text{חיובי}}=\frac{4x-2x-12\sqrt{x}}{\underbrace{\sqrt{x}}_{\text{אי שלילי}}\cdot\text{חיובי}}=\frac{2x-12\sqrt{x}}{\text{אי שלילי}}$$

$$f'(x)=0\to2x=12\sqrt{x}$$

$$4x^2=144x\to4\underbrace{x}_{\cancel{x=0}}\underbrace{(x-36)}_{x=36}=0$$

($x=0$ אינו בת"ה של הנגזרת. זה חור בנגזרת בקצה תחום הגדרתה. ניתן לחשב את השיפוע בשאיפה לנקודה הזו, אילו היו מבקשים. הוא לא אינסופי!).

נכין טבלה עם הערכים $0,9,36$.

x	$x<0$	0	5	9	25	36	45
y'			$-$		$-$	0	$+$
y		$(0,0)$	$\searrow$		$\searrow$	min $(36,48)$	$\nearrow$

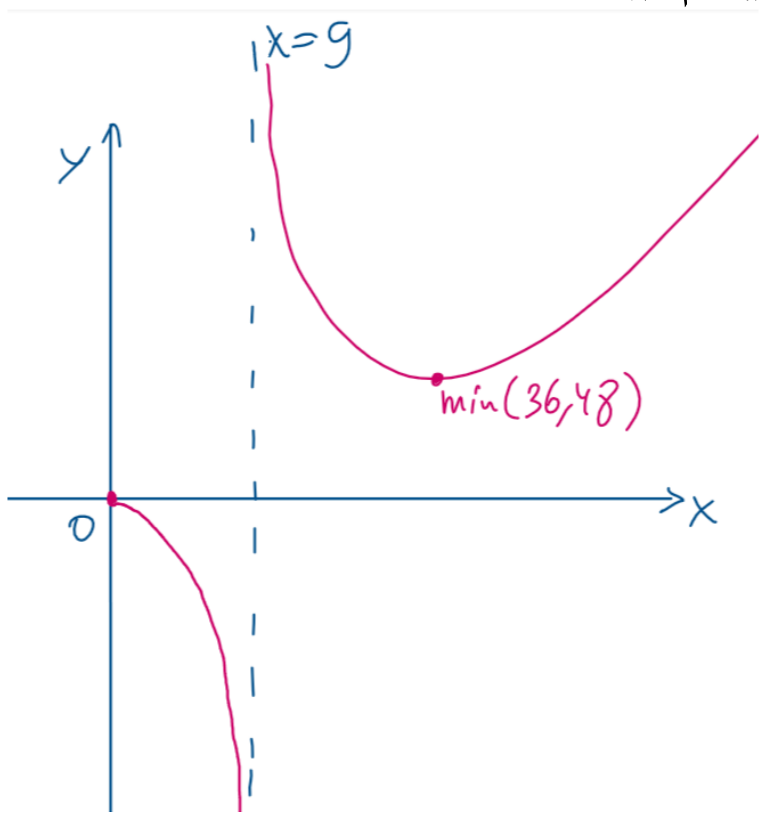
$f(36)=4\cdot 36/3=48$

נקודת מקסימום קצה: $(0,0)$ מינימום: $(36,48)$

(3) הפונקציה עולה לכל $x>36$, ויורדת לכל $0<x<9 \vee 9<x<36$

(5) אסימפטוטה אנכית $\boxed{x=9}$ (מכנה מתאפס ומונה לא מתאפס)

ג. סקיצה:



ד. נתונה $\frac{\sqrt{x}-3}{4x}=\frac{1}{f(x)}=g(x)$. ת"ה $x>0$ מתקבל מחיתוך: $x\neq 0 \wedge x\geqslant 0$,

נקודות קיצון:

$g'(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot 4x-4(\sqrt{x}-3)}{\text{חיובי בת"ה}}$ נשים לב כי המונה מתאפס בדיוק באותן הנקודות (אותם רכיבים בסדר הפוך)

ולכן ב-$x=36$ חשד לקיצון, ובנוסף סימני הנגזרת יהיו מנוגדים (בגלל היפוך הסדר של הביטויים במונה $(a-b=-(b-a)$.

מכאן שזו נקודת מקסימום ב-$(36,\frac{3}{144})$.

156/8: $f(x)=\frac{ax}{2\sqrt{x}-x}$

נתון כי המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=9$ יוצר שזווית של $45°$ עם הכיוון החיובי של ציר ה-x.

א. נמצא את a. מהנתון נובע כי $f'(9)=1$ שכן $tan(45°)=1$. נגזור ונפתור את המשוואה:

$$f'=\frac{a(2\sqrt{x}-x)-ax\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-1\right)}{(2\sqrt{x}-x)^2}$$

$$f'(9)=1=\frac{a(2\cdot3-9)-9a\left(\frac{1}{3}-1\right)}{(2\cdot3-9)^2}$$

$$\frac{-3a-3a+9a}{9}=1\ /\cdot9$$

$$3a=9\rightarrow\boxed{a=3}$$

הפונקציה: $\boxed{f(x)=\frac{3x}{2\sqrt{x}-x}}$

ב. ת"ה: נפתור את המערכת: $2\sqrt{x}-x\neq0 \quad \wedge \quad x\geqslant0$

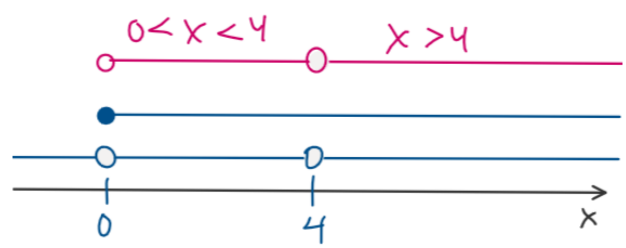
נפתור את אי השוויון הראשון:

$$2\sqrt{x}\neq x\ /^{\wedge}2$$

$$4x\neq x^2$$

$$x(x-4)\neq0\rightarrow x\neq0\wedge x\neq4$$

מחיתוך עם אי השוויון השני מתקבל:



(שני התחומים לחיתוך מוצגים בכחול. תוצאת החיתוך באדום).

ת"ה $\boxed{0<x<4 \quad \vee \quad x>4}$

ג. הראה שהפונקציה עולה בכל ת"הגדרתה. נסיים לגזור את המונה (המכנה אי שלילי ולא ישפיע על הסימן):

$$f'\text{מונה}=a\left(2\sqrt{x}-x\right)-ax\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-1\right)=2a\sqrt{x}\cancel{-ax+ax}-\frac{ax}{\sqrt{x}}$$

$$=2a\sqrt{x}-a\sqrt{x}=a\sqrt{x}$$

וכיוון שבת"ה $x>0$ גם $a\sqrt{x}>0$ כרצוי.

ד. אסימפטוטות המקבילות לצירים.

1) החשד לאסימפטוטות אנכיות הוא בנקודות $x=0,x=4$

$\boxed{f(x)=\frac{3x}{2\sqrt{x}-x}}$ עבור $x=4$ המכנה מתאפס והמונה לא מתאפס ולכן זו בהכרח אסימפטוטה אנכית.

עבור $x=0$ גם המכנה וגם המונה מתאפסים. בבדיקת הצבה ניתן לראות כי הפונקציה שואפת ל-0, ונקבל

חור: $(0,0)$. הצבה כזו ב-menu9 or mode 7 ניתן לעשות למשל עם start=0.01, end=0.001, step=-0.001

ניתן (אך לא תידרשו) לנתח זאת ע"י lim צמצום בחזקה הגבוהה:

$$\lim_{x\to\infty^+}\left(\frac{3x}{2\sqrt{x}-x}\right)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\overset{3}{\cancel{\frac{3x}{x}}}}{\underset{\infty}{\cancel{\frac{2\sqrt{x}}{x}}}+\underset{-1}{\cancel{\frac{-x}{x}}}}\right)=\frac{3}{\infty}=0$$

פירוט נוסף לגבי $\overset{\infty}{\cancel{\frac{2\sqrt{x}}{x}}}$:

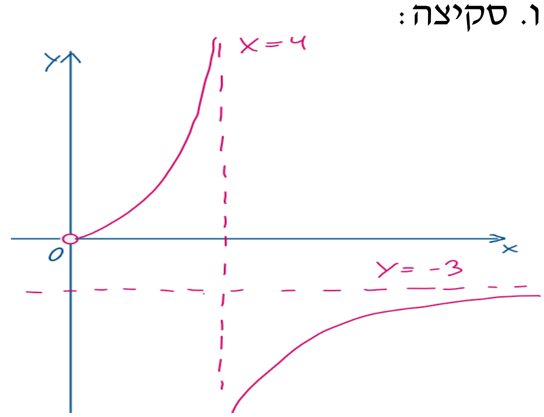
$$\lim_{x\to0^+}\frac{2\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{2\cancel{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}\cdot\cancel{\sqrt{x}}}=\lim_{x\to0^+}\frac{2}{\sqrt{x}}=\frac{2}{o^+}=\infty$$

2) אסימפטוטות אופקיות:

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\overset{3}{\cancel{\frac{3x}{x}}}}{\underset{0}{\cancel{\frac{2\sqrt{x}}{x}}}+\underset{-1}{\cancel{\frac{-x}{x}}}}\right)=-3 \quad \text{ומכאן } y=-3$$

ה. נניח בשלילה שהפונקציה חותכת את האסימפטוטה $y=-3$. כיוון שבאינסוף היא מתכנסת ל--3 נובע שבשלב ראשון היא עולה וחותכת את האסימפטוטה ואז משנה כיוון ויורדת חזרה לכיוון האסימפטוטה. זו סתירה לסעיף ג' (ובמילים אחרות, אילו זה היה המצב, היינו מקבלים נקודת מקסימום). מכאן שהפונקציה אינה חותכת, כרצוי.

ו. סקיצה:



ז. (סעיף חשיבה) ידוע שבתחום $x>4$ אין נקודות פיתול. מהסקיצה רואים כיפוף שלילי (קעירות כלפי מטה), ומכאן שהנגזרת f'' בהכרח קטנה מ-0 בכל התחום הזה. (לשם השוואה למי שלא זוכר מתי הכיפוף "חיובי", הנגזרת של פרבולה מחייכת (כיפוף חיובי/קעירות כלפי מעלה/קמירות) היא 2 ($y=x^2\to y''=2$)

ת"ה + גזירה בשתי דרכים: $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x\sqrt{x-8}}$

ת"ה: צריך לקיים 3 אי שוויונות: $\underbrace{\underbrace{x-8>0}_{x>8} \wedge \underbrace{x\neq 0 \wedge x\geqslant 0}_{x>0}}_{\text{תוצאת החיתוך } x>8}$

החיתוך כאן בוצע בשני שלבים בצורה לוגית (להבדיל מגרפית). שימו לב שחיתוך מתנהג כמו כפל: $A\wedge(B\wedge C)=A\wedge B\wedge C=(A\wedge B)\wedge C$ ולכן אין חשיבות לסדר בו אנו חותכים בין התנאים השונים.

בתרגיל זה רצוי לצמצם ב-$\sqrt{x}$ באופן הבא: $\frac{\cancelto{1}{\sqrt{x}}}{\cancelto{\sqrt{x}}{x}}$ מפני שבמכנה מתקיים $x=\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}$

בהמשך מוצג פתרון מקוצר כולל צמצום, וגזירה תוך ניצול חוקי חזקות וחזקות שליליות.

כאן אציג את הנגזרת המלאה בדרך הארוכה. בהמשך בכל מקרה יש צורך לצמצם:

$$f'(x)=\frac{\overbrace{\frac{1}{2\cancel{\sqrt{x}}}}^{u'}\cdot\overbrace{\cancelto{\sqrt{x}}{x}\sqrt{x-8}}^{v}-\overbrace{\left(1\cdot\sqrt{x-8}+\frac{x}{2\sqrt{x-8}}\right)}^{\text{נגזרת מכפלה } v'}\cdot\overbrace{\sqrt{x}}^{u}}{\left(x\sqrt{x-8}\right)^{2}}=$$

$$f'(x)=\frac{\frac{\cancel{\sqrt{x}}\sqrt{x-8}}{2}-\cancel{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x-8}+\frac{x}{2\sqrt{x-8}}\right)}{\sqrt{x^{\cancelto{3}{4}}}(x-8)}$$ (צמצום כל הביטויים במונה ב- $\sqrt{x}$)

$$f'(x)=\frac{\frac{\sqrt{x-8}}{2}-\left(\frac{2(x-8)+x}{2\sqrt{x-8}}\right)}{\sqrt{x^3}(x-8)}$$ כעת נעלה על מכנה משותף במונה:

$$f'(x)=\frac{\frac{x-8-2x+16-x}{2\sqrt{x-8}}}{\sqrt{x^3}(x-8)}=\frac{-\cancel{2}x+\cancelto{4}{8}}{\cancel{2}\sqrt{x-8}\sqrt{x}(x-8))}$$

$$f'(x)=\frac{-x+4}{\sqrt{x^3}\sqrt{(x-8)}^{3}}$$

נגזור בדרך הקצרה (חוקי חזקות): $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x\sqrt{x-8}}$

ראשית x חיובי בת"ה ולכן $\sqrt{x}$ מוגדר, וניתן לצמצם בו מיידית:

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x\sqrt{x-8}}\underbrace{=}_{\text{בת"ה}}\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x-8}}\underbrace{=}_{x\text{ חיובי}}\frac{1}{\sqrt{x^2-8x}}$$

וכעת ניתן לגזור לפי נגזרת מורכבת: $f(x)=\left(x^2-8x\right)^{-0.5}$

$$f'(x)=-\frac{1}{2}\left(x^2-8x\right)^{-1.5}\overbrace{(2x-8)}^{\text{נגזרת פנימית}}$$

ונשים לב שהמכנה מוגדר וחיובי בכל ת"ה. זה חשוב כי ניתן לקבוע $f'(x)=-\frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}x-\cancelto{-4}{8}}{(x^2-8x)^{\frac{3}{2}}}=\frac{4-x}{(x^2-8x)^{\frac{3}{2}}}$ סימני נגזרת לפי המונה בלבד.

מכנה הנגזרת רשום באופן שונה, אך זהה לגמרי לנגזרת שקיבלנו בדרך הארוכה.

155/2: $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-8}$

כדי שהפונקציה תהיה מוגדרת צריכים להתקיים $x\geqslant 0\wedge x\sqrt{x}-8\neq 0$

$$x\sqrt{x}\neq 8/^{\wedge 2}$$
$$x^3\neq 64$$
$$x\neq 4$$

ובסה"כ ת"ה $\boxed{0\leqslant x<4\vee x>4}$

ב. חיתוך צירים: $f(0)=0$ חיתוך עם שני הצירים $(0,0)$, אין נקודות נוספות.

ג. אס' אנכית $\boxed{x=4}$ (מכנה מתאפס ומונה לא).

אס' אופקית $\boxed{y=0}$ $x\to\infty\implies$ (מעריך חזקת מכנה גדול יותר).

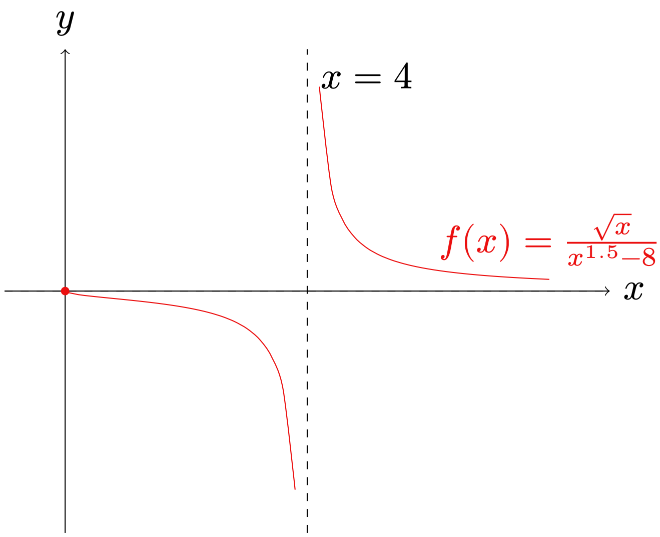
ד. קיצון: לפני המשך גזירה היינו רוצים לצמצם אך לא ניתן:

$$f'(x)=\frac{\overbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}^{u'}\left(\overbrace{x\sqrt{x}-8}^{v}\right)-\overbrace{1.5\sqrt{x}}^{v'=\left(x^{1.5}\right)'}\overbrace{\cdot\sqrt{x}}^{u}}{\left(x\sqrt{x}-8\right)^2}=$$
$$=\frac{x\sqrt{x}-8-2\sqrt{x}\cdot 1.5x}{2\sqrt{x}\left(x\sqrt{x}-8\right)^2}$$
$$f'(x)\boxed{=\frac{-8-2x\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\left(x\sqrt{x}-8\right)^2}}$$

המונה מורכב משני איברים חיוביים ולכן שלילי. המכנה מורכב משני איברים חיובים ולכן חיובי. מכאן שהפונקציה יורדת בשני התחומים בהם היא מוגדרת: ירידה: $0\leqslant x<4\vee x>4$,

עליה: אין.

ו. סקיצה:



ז. כיוון ש- f' תמיד שלילית די למצוא תחום שליליות של f, ולכן $\boxed{0 < x < 4}$ (לא כולל את $0 = x$ בו הפונקציה מוגדרת, והנגזרת לא, והפונקציה שם אינה שלילית).

פונקציות עם פרמטר, ועוד

שאלת תרגול לקראת בחינת מאי 2024

לצרכי אחידות השתמשתי ב-$f(x)$ במקום y.

לפונקציה $f(x)=\frac{x^2-1}{\sqrt{k-x^2}}$ אסימפטוטה אנכית כאשר $x=\sqrt{5}$

א. מציאת k: כיוון שניתן לרשום את המכנה $\sqrt{\left(\sqrt{k}-x\right)\left(\sqrt{k}+x\right)}$ ומהנתון נובע כי מתאפס בהכרח עבור $x=\sqrt{5}$ נובע $\boxed{k=5}$ $\sqrt{k}-\sqrt{5}=0\rightarrow$. כעת נרשום את הפונקציה המעודכנת:

$$\boxed{f(x)=\frac{x^2-1}{\sqrt{5-x^2}}}$$

ב.(1) ת"ה: יש לקיים $5-x^2>0$ (ולא $\geqslant 0$) במכנה פרבולה עצובה, ולכן $\boxed{-\sqrt{5}<x<\sqrt{5}}$

לפני שממשיכים, בודקים אם ניתן לצמצם (אך כאן לא ניתן).

ב.(2) קיצון:

$$f(x)'=\frac{2x\sqrt{5-x^2}-\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{5-x^2}}\left(x^2-1\right)}{5-x^2}$$

$$=\frac{2x\left(5-x^2\right)+x\left(x^2-1\right)}{\left(5-x^2\right)\sqrt{5-x^2}}=\frac{-x^3+9x}{\left(5-x^2\right)^{1.5}}$$

$$\boxed{f(x)'=\frac{x\left(9-x^2\right)}{\left(5-x^2\right)^{1.5}}}$$ בדוקה

$f(x)'=0\rightarrow x=0,\cancel{x=\pm3}$ לא בת"ה

סימן הנגזרת תלוי כאן רק בסימן x (שני הפרבולות העצובות, במונה ובמכנה חיוביות בת"ה). ניתן להסתדר בלי טבלה.

x	$-\sqrt{5}$	-1	0	1	$\sqrt{5}$
y'		$-$	0	$+$	
y		$\searrow$	min $\left(0,\frac{-1}{\sqrt{5}}\right)$	$\nearrow$	

ולכן $\boxed{\left(0,\frac{-1}{\sqrt{5}}\right)\ min}$

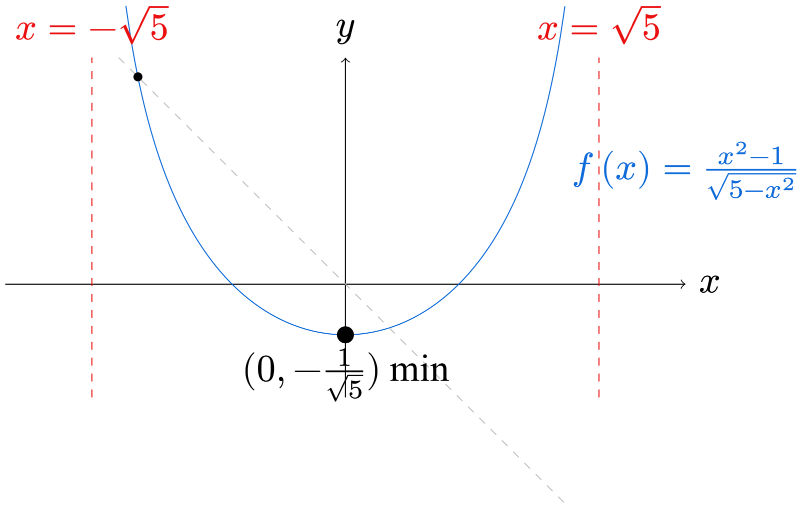
ב.(3) עליה: $0<x<\sqrt{5}$, ירידה $-\sqrt{5}<x<0$

ב.(4) חיתוך ציר x: $f(x)=0\rightarrow x^2-1=0\rightarrow x=\pm1\rightarrow(-1,0),(1,0)$

ציר y כבר מצאנו לעיל $\left(0,\frac{-1}{\sqrt{5}}\right)$

ב.(5) אסימפטוטות אנכיות: $x=\sqrt{5}, x=-\sqrt{5}$ (מכנה מתאפס ומונה לא), אס' אופקיות אין (מעריך חזקת מונה גדול יותר).

ג. סקיצה של $f(x)$



ד. מציאת נקודה: כדי לקבל מרחק מציר שווה משני הצירים נרצה להשוות את הפונקציה לישר $y=x$ או לישר $y=-x$. במקרה שמחפשים נקודה ברביע השני, נסיק שיש לחתוך עם $y=-x$.

$$
\begin{aligned}
-x=y &= \frac{x^2-1}{\sqrt{5-x^2}} \\
-x\sqrt{5-x^2} &= x^2-1 \,/()^2 \,, \quad \boxed{\underbrace{x<-1}_{\text{תחום חיוביות ברביע 2}}} \\
5x^2-x^4 &= x^4-2x^2+1 \\
-2x^4+7x^2-1 &= 0, \;\; t=x^2 \\
t_{1,2} &\approx 0.149, 3.35 \\
x_{1,2} &\approx \underbrace{-\sqrt{3.35}}_{\text{החיובי נפסל}} = -1.83 \\
x_{3,4} &\approx \underbrace{\cancel{\pm\sqrt{0.149}}}_{\text{לא בתחום חיוביות}} \qquad \boxed{(-1.83, 1.83)}
\end{aligned}
$$

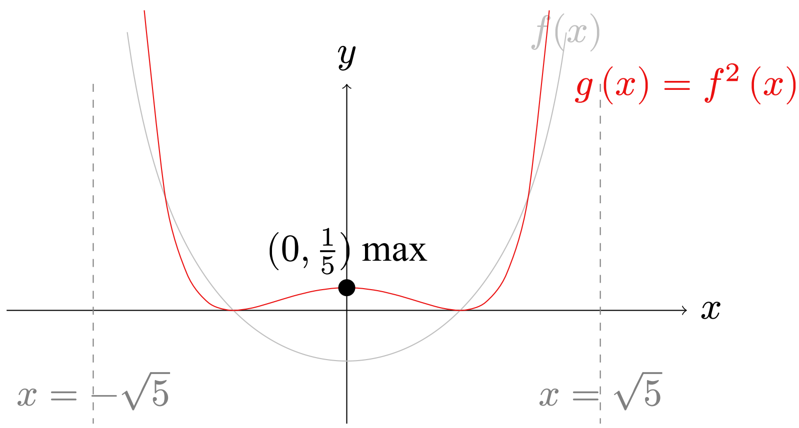
טרנספורמציות $\left(f\left(x\right)\right)^{2}$ ו- $\frac{1}{f^{2}}$

להלן 2 טרנספורמציות על הפונקציה מהשאלה הקודמת:

ה. f^{2} מבלי לחקור שוב את הפונקציה, שרטטו סקיצה ורשמו את נקודות הקיצון של $g\left(x\right)=\left(f\left(x\right)\right)^{2}$ מקדם אנליזה, טרנספורמציה של העלאה בריבוע תגרום לשינויים הבאים:

1. תהפוך כל תחום שליליות לתחום חיוביות,
2. כתוצאה מ-1 נקודות קיצון בשיעור y שלילי (מתחת לציר x) תהיה מעל לציר, ותשנה סיווג ממינימום למקסימום ולהפך,
3. ההעלאה בריבוע תיצור שיפוע 0 בנקודות האפס (מגלשה), כמו כל שורש מריבוי גדול מ-1 כפי שראינו בקדם אנליזה).

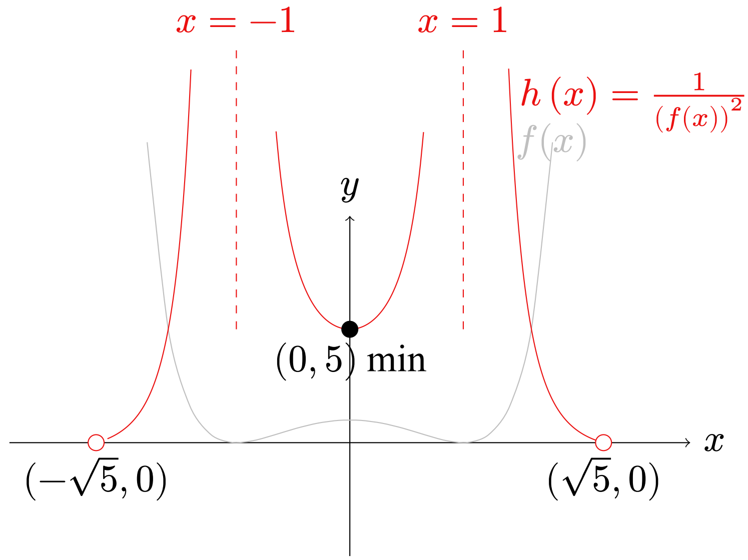
השילוב הנ"ל הופך את נקודות החיתוך לנקודות מינימום, ומתקבלת הסקיצה הבאה:



ו. $\frac{1}{f^{2}}$ מבלי לחקור, ובהתבסס על הסקיצה הקודמת, שרטטו סקיצה ורשמו את נקודות הקיצון של $h\left(x\right)=\frac{1}{\left(f\left(x\right)\right)^{2}}$
יש לנתח טרנספורמציה של "1 חלקי" ביחס לפונקציה $g\left(x\right)$:
תהפוך כל תחום שליליות לתחום חיוביות,

1. אסימפטוטות אנכיות הופכות לחור (חלוקה באינסוף)
2. נקודות אפס הופכות לאסימפטוטות אנכיות
3. נקודות קיצון אחרות הופכות ממקסימום למינימום ולהפך.

התוצאה הסופית:


$x=-1$
$x=1$
$h\left(x\right)=\frac{1}{\left(f\left(x\right)\right)^{2}}$
$f\left(x\right)$
y
$(0,5)$ min
x
$(-\sqrt{5},0)$
$(\sqrt{5},0)$

2 פרמטרים

זמין גם בסרטון:

לגרף הפונקציה $f\left(x\right)=\frac{\sqrt{x-a}}{cx^2}$ יש קיצון בנקודה $\left(8,\frac{\sqrt{2}}{8}\right)$.

א. חשב את a ואת c:

תחום הגדרה חלקי: $x\neq 0, c\neq 0, x\geqslant a$

נגזור: $f'\left(x\right)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x-a}}\cdot\cancel{c}x^2-2\cancel{c}x\sqrt{x-a}}{c^{\cancelto{1}{2}}x^4}$

הערה: ההחלטה לא לצמצם את x היא באופן מודע, כדי להישאר עם חזקה זוגית במכנה (שתבטיח חיוביות בת"ה ותאפשר מציאת סימני נגזרת תוך ניתוח של המונה בלבד).

$$f'\left(x\right)=\frac{\frac{x^2-4x(x-a)}{2\sqrt{x-a}}}{cx^4}=$$

$$=\frac{x^2-4x^2+4xa}{2cx^4\sqrt{x-a}}=\boxed{\frac{-3x^2+4xa}{2cx^4\sqrt{x-a}}}$$

(מונה מתאפס) $f'\left(8\right)\overset{\text{נתון}}{=}0\to-3\cdot 64+32a=0$

$192=32a/\div 32$

$\boxed{a=6}$

נמצא את c

$f(8)=\frac{\sqrt{8-6}}{c\cdot 64}\overset{\text{נתון}}{=}\frac{\sqrt{2}}{8}$

$f\left(8\right)=\frac{\sqrt{2}}{64c}=\frac{\sqrt{2}}{8}$

המונים שווים. נובע שהמכנים בהכרח שווים:

$\to 64c=8\to c=\frac{1}{8}$

נציב את a ו-c בפונקציה ובנגזרת לפני שממשיכים בפתרון:

נשים לב שבמקום לחלק ב-$\frac{1}{8}$ (ערכו של c) רצוי לכפול ב-8. מי שגרר את כל השאלה עם שמינית במכנה סבל סתם.

$f'\left(x\right)=\frac{8(-3x^2+24x)}{2x^4\sqrt{x-6}}$

$\boxed{f'\left(x\right)=\frac{-12x^2+96x}{x^4\sqrt{x-6}}}$

$\boxed{f\left(x\right)=\frac{8\sqrt{x-6}}{x^2}}$

בדיקה: $\frac{\sqrt{2}}{8}=f\left(8\right)=0.17677$ כרצוי.

בדיקת נכונות נגזרת:

$$f'(7) \overset{\text{הצבה בנגזרת}}{\widehat{=}} 0.03498 \overset{\text{ערך נגזרת במחשבון}}{\widehat{=}} \frac{d\boxed{\frac{8\sqrt{x-6}}{x^2}}}{dx}\Bigg|_{x=7}$$

ב 1) תחום הגדרה : $\boxed{x \geqslant 6}$ $x \neq 0 \wedge x-6 \geqslant 0 \to$ (וכמובן שצריך לפשט כמה שאפשר כפי שמודגם כאן).

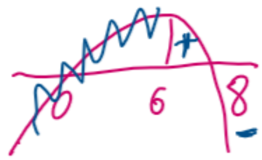
העשרה : לא בחומר אבל מה שקורה הוא הדבר הבא :

$\{x \in \mathbb{R} | x \geqslant 6\} \subseteq \{x \in \mathbb{R} | x \neq 0\}$ כשקבוצה אחת מוכלת בקבוצה אחרת אז החיתוך בינהם (אוסף האיברים שנמצאים גם כאן וגם שם) הוא הקבוצה המוכלת.

וכמובן שכאן ניתן להבין את זה לוגית (שאם $x \geqslant 6$ אז הוא בהכרח **שונה מאפס** ולכן לא צריך לרשום את זה בת"ה).

ב 2) קיצון : נקודת התאפסות מונה : $f'(x) = 0 \to \underset{\text{מחוץ לת"ה } \cancel{x=0}}{\underset{\Downarrow}{12x}} \quad \underset{x=8}{\underset{\Downarrow}{(8-x)}} = 0$

וכאן ניתן להסיק סימני נגזרת תוך הסתכלות על המונה בלבד, בצורה גרפית (**פרבולה עצובה** - איור משמאל) :



x	<6	6	7	8	9
f'			+	0	−
f		0		max	

$(6,0)$ min קצה

$(8, \frac{2}{8})$ max

ב 3) הפונקציה עולה בתחום $\boxed{6 \leqslant x < 8}$ (ואני שוב מבקש מספרים עולים משמאל לימין כמו בציר המספרים).

מי שכתב $6 < x < 8$ לא יאבד נקודות.

הפונקציה יורדת בתחום $\boxed{x > 8}$.

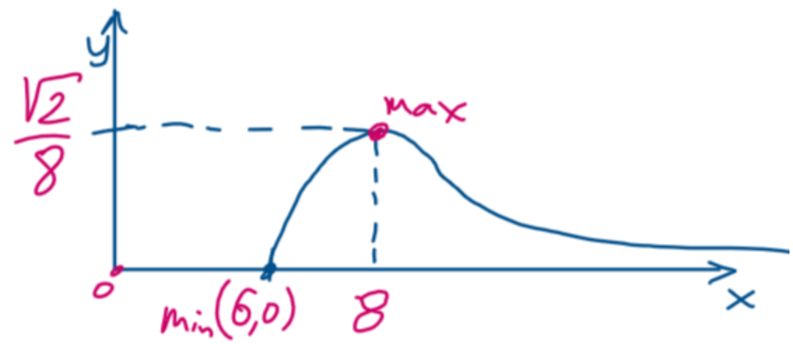
ב 4) חיתוך עם ציר x $\boxed{x = 6}$ $f(x) = 0 \to$

$f(0)$ לא מוגדרת ולכן $\boxed{\text{אין חיתוך עם ציר y}}$

ב 5) אס' אופקית $y = 0$ (מעריך חזקת מכנה גדול ממעריך חזקת מונה).

אין אס' אנכית (המכנה אינו מתאפס בת"ה).

ג) סרטוט :



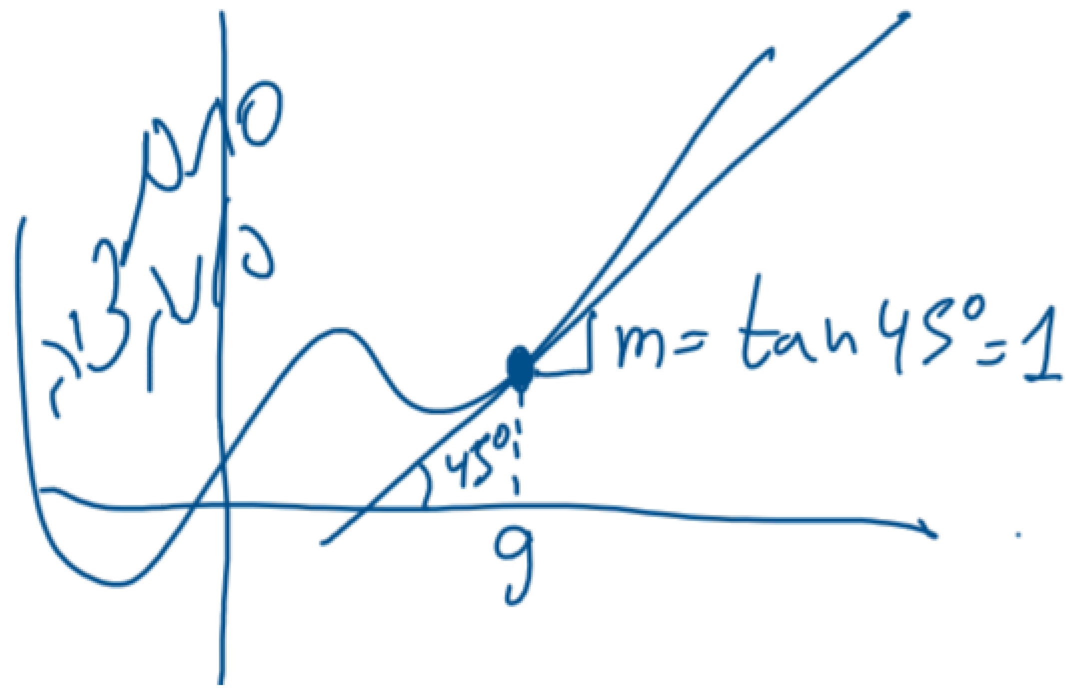
y
$\frac{\sqrt{2}}{8}$
max
0
min(6,0)
8
x

שאלה ב2 157/8

נתונה $f\left(x\right)=\frac{ax}{2\sqrt{x}-x}$. הישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=9$ יוצר זווית של 45° עם הכיוון החיובי של ציר x.

א. מצא את a ורשום את הפונקציה.

באיור שלהלן דוגמא למצב שתואר (אין קשר בין הפונקציה בסרטוט לפונקציה הנתונה).



המשמעות - מה שניתן (וצריך) להסיק מהנתון הוא: $f^{'}\left(9\right)=tan45^{\circ}=1$

נגזור ואולי נצליח למצוא את a...

$$f^{'}\left(x\right)=\frac{a(2\sqrt{x}-x)-ax\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-1\right)}{\left(2\sqrt{x}-x\right)^{2}}=$$

$$=\frac{2a\sqrt{x}\cancel{-ax}-a\sqrt{x}\cancel{+ax}}{\left(2\sqrt{x}-x\right)^{2}}$$

הסבר קצר: $\boxed{\frac{ax}{\sqrt{x}}=\frac{a\sqrt{x}\cancel{\sqrt{x}}}{\cancel{\sqrt{x}}}}$

$$\boxed{f^{'}\left(x\right)=\frac{a\sqrt{x}}{\left(2\sqrt{x}-x\right)^{2}}}$$

$$f^{'}\left(9\right)=1=\frac{a\sqrt{9}}{\left(2\sqrt{9}-9\right)^{2}}=\frac{3a}{\left(6-9\right)^{2}}=\frac{3a}{9}=\frac{1}{3}a\rightarrow\boxed{a=3}$$

נציב את a שמצאנו ונמשיך.

ת"ה: נרשום את הפונקציה:

$$\boxed{f\left(x\right)=\frac{3x}{2\sqrt{x}-x}}\leftarrow 2\sqrt{x}-x\neq0\qquad\wedge\qquad\boxed{x\geqslant0}$$

$\sqrt{x}\div/\ x\neq2\sqrt{x}$ יש הנחה סמוייה שx חיובי. וזה לא נתון...(ההתעלמות מ-$x=0$ היא שגיאה). כיוון ש

$x=0$ פותר את המשוואה, יש להסיק $x\neq 0$ לפני שמחלקים ב-$\sqrt{x}$

לאחר החלוקה קיבלנו: $\sqrt{x}\neq 2$ ומכאן:

$x\neq 4$ ומכאן:

$\boxed{\text{ת"ה} \quad x>4 \quad \vee \quad 0<x<4}$

אלטרנטיבה:

$2\sqrt{x}\neq x/\wedge^2$ וגם $x\geqslant 0$

$4x\neq x^2\to x^2-4x\neq 0\to x\left(x-4\right)\neq 0\to \boxed{x\neq 0\wedge x\neq 4}$

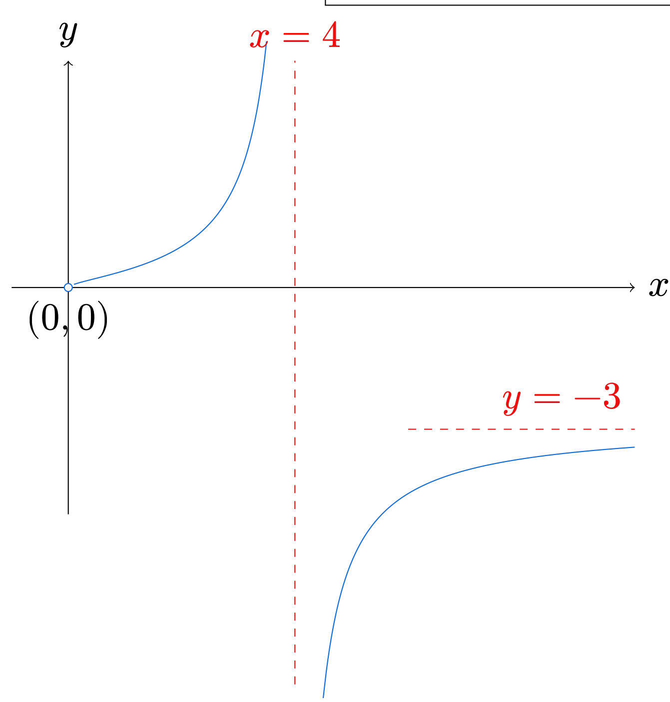
ומחיתוך עם $x\geqslant 0$ מתקבל אותו ת"ה שקיבלנו קודם.

אסימפטוטות וחורים: לצורך ניתוח אסימפטוטות ניתן לצמצם ב-$\sqrt{x}$ ולקבל: $\boxed{f\left(x\right)=\dfrac{3\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}}$ באופן זה ניתן "לראות" בקלות חור ב-$(0,0)$ (הפונקציה המקורית לא מוגדרת אבל המצומצמת כן מחזירה 0). כך ניתן לראות כי ב- $x=4$ אסימפטוטה אנכית (מכנה מתאפס ומונה לא). כמובן שבבחינה מומלץ לא להיכנס לזה ולבדוק בטבלת ערכים במחשבון (אלא אם יש הרבה זמן ושאלה בנושא).

אסימפטוטה אופקית: $x\to\infty\Longrightarrow y=-3$

עליה וסקיצה: כעת נרשום את הנגזרת וניתן לסיים את החקירה

$\boxed{f^{'}\left(x\right)=\dfrac{3\sqrt{x}}{\left(2\sqrt{x}-x\right)^2}}$ חיובית תמיד בת"ה, ולכן הפונקציה תמיד עולה ואין צורך בטבלה.



שאלה ב2 157/10 (הערות)

$y=\frac{\sqrt{x+a}}{cx}$ ושיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $\left(-2,-\frac{1}{2}\right)$ שעל גרף הפונקציה הוא $-\frac{1}{2}$

$\boxed{y'(-2)=-\frac{1}{2}}$ וצריך להסיק עוד תנאי חשוב: $\boxed{y(-2)=-\frac{1}{2}}$

$$y'=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x+a}}\cancel{c}x-\cancel{c}\sqrt{x+a}}{c^{\cancel{2}\,1}x^2}=\frac{\frac{x-2(x+a)}{2\sqrt{x+a}}}{cx^2}=\frac{x-2(x+a)}{2cx^2\sqrt{x+a}}=\boxed{y'=\frac{-2a-x}{2cx^2\sqrt{x+a}}}$$

(1) $\boxed{\frac{1-a}{4c\sqrt{a-2}}=\frac{-1}{2}}=\frac{-2a--2}{2c\cdot4\sqrt{-2+a}}$ (מהנגזרת)

(2) $\boxed{-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{-2+a}}{-2c}}\Big/\cdot-2c$ (מהפונקציה)

בצד שמאל מתקבל: $\frac{-2c}{-2}$

$c=\sqrt{a-2}$ ונציב במשוואה השנייה:

$$\frac{1-a}{4\sqrt{a-2}\sqrt{a-2}}=\frac{-1}{2}$$

$$\frac{1-a}{4a-8}=-\frac{1}{2}$$

$$\frac{a-1}{4a-8}=\frac{1}{2}\Big/\cdot(4a-8)$$

$$a-1=2a-4\rightarrow\boxed{a=3}\rightarrow\boxed{c=1}$$

כעת מציבים בפונקציה וממשיכים לפתור (לא סיימתי את התרגיל ****)

שאלה 157/7 (הערות נוספות)

(השאלה פתורה במלואה בתחילת המסמך).

$f(x)=\frac{4x}{b\sqrt{x}-3}$. שיפוע המשיק לפונקציה בנקודה $x=1$ הוא -2.5

יש להסיק: $f'(1)=-2.5$

נגזור לפני מציאת ת"ה:

$f'(x)=\frac{4(b\sqrt{x}-3)-\frac{4bx}{2\sqrt{x}}}{(b\sqrt{x}-3)^2}$ בשלב זה רצוי מאוד לצמצם במונה את $\frac{x}{\sqrt{x}}$ ששווה $\sqrt{x}$ (ניתן לצמצם עבור $x\neq0$ ולשים לב ולרשום לפני זה **שהנגזרת אינה מוגדרת ב-** $x=0$.

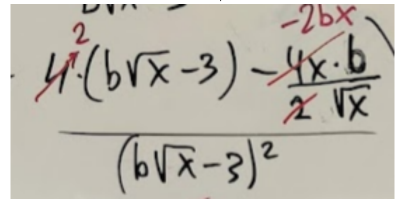
לאחר הצמצום מתקבל:

$$f'(x)=\frac{4(b\sqrt{x}-3)-2b\sqrt{x}}{(b\sqrt{x}-3)^2}=\boxed{f'(x)=\frac{2b\sqrt{x}-12}{(b\sqrt{x}-3)^2}}$$

למי שלא מעוניינים לצמצם: מעלים על מכנה משותף $\sqrt{x}$ (כלומר כופלים את הביטוי השמאלי במונה ב-$\sqrt{x}$):

$$f'(x)=\frac{4(b\sqrt{x}-3)-\frac{\cancel{4}^{2}bx}{\cancel{2}\sqrt{x}}}{(b\sqrt{x}-3)^2}=\frac{\frac{4bx-12\sqrt{x}-2bx}{\sqrt{x}}}{(b\sqrt{x}-3)^2}=\frac{2bx-12\sqrt{x}}{\sqrt{x}(b\sqrt{x}-3)^2}$$

כאן בתמונה - שגיאת צמצום חמורה שעשיתי בשיעור הפרטני, ובגלל זה בדיקת הנגזרת הראתה שגיאה. ל-4 משמאל - אין מול מה להצטמצם שכן הוא לא נמצא מעל קו השבר בשלב זה.



נמצא את b (כזכור $f'(1)=-2.5$)

$f'(x)=\frac{2b\sqrt{x}-12}{\left(b\sqrt{x}-3\right)^2}\rightarrow f'(1)=\frac{2b\cdot 1-12}{\left(b\cdot 1-3\right)^2}=-2.5/\cdot -2$ (הכפלה במינוס 2 תעזור למנוע טעויות).

$$\frac{24-4b}{\left(b-3\right)^2}=5/\cdot(b-3)$$

$$24-4b=5\left(b^2-6b+9\right)$$

$$24-4b=5b^2-30b+45$$

$$5b^2-26b+21=0\rightarrow b_{1,2}=1,4.2$$

סתם פונקציה $f(x)=\frac{\sqrt{x^2}}{x+x^2}$

ת"ה: המונה מוגדר לכל x לכן יש לפתור רק

$$x+x^2\neq 0\to x(1+x)\neq 0$$
$$\boxed{x<-1\vee -1<x<0\vee x>0}$$

חיתוך צירים: $f(x)=0\to x^2=0$ לא בת"ה ולכן אין חיתוך עם הצירים.

אסימפטוטות: אופקית: $x\to\pm\infty\implies y=0$ אנכית: $x=-1$ (מכנה מתאפס ומונה לא).

חורים: כאשר $x\to 0$ ניתוח החור לא כל כך פשוט. ניתוח של $\frac{1}{f(x)}$ מאפשר לצמצם ולראות את ערך הפונקציה כאשר $x\to 0^+$ וכאשר $x\to 0^-$. בבחינה, עדיפה טבלת ערכים. נקבל

$$x\to 0^+\implies y=1$$
$$x\to 0^-\implies y=-1$$

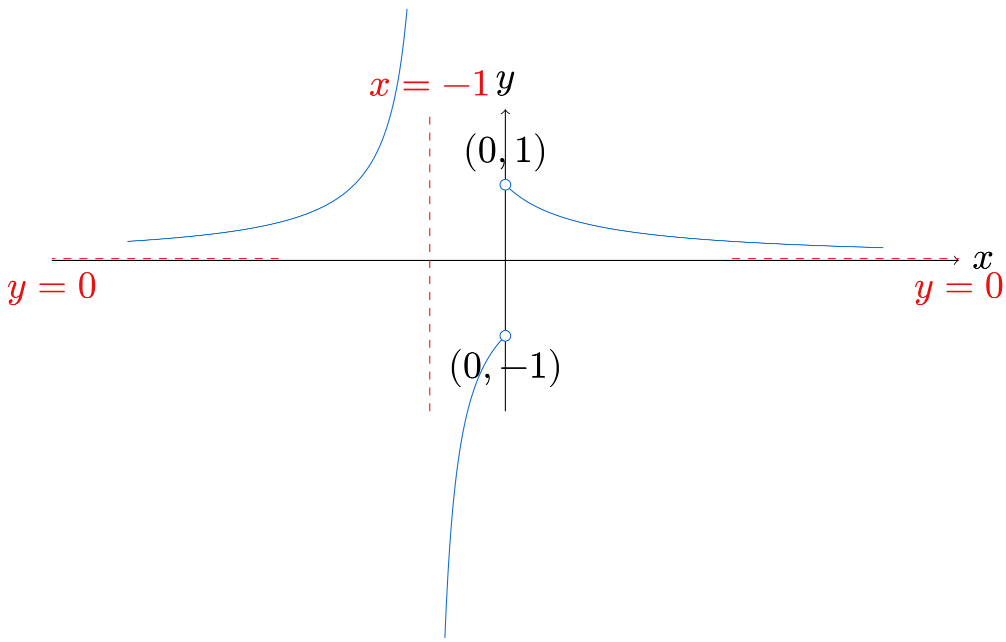
ובסה"כ חורים $(0,-1)$, $(0,1)$.

עליה, ירידה:

$$f'(x)=\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2}}(x+x^2)-(2x+1)\sqrt{x^2}}{(x+x^2)^2}=$$
$$=\frac{\cancel{x^2}+x^3-2x^3-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2}(x+x^2)^2}=\boxed{\frac{-x^3}{\sqrt{x^2}(x+x^2)^2}}$$

- סימני הנגזרת מושפעים רק מהמונה (המכנה חיובי תמיד בת"ה). ולכןעליה: $x<-1,-1<x<0$ ירידה: $x>0,$
- רעיון נחמד **אך שגוי** יהיה לצמצם את המונה כנגד $\sqrt{x^2}$ (נקבל סימנים שגויים בנגזרת כאשר $x<0$).

סקיצה:


$x=-1$
y
$(0,1)$
x
$y=0$
$y=0$
$(0,-1)$

בחינה5.24 $f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-a}}$

א. מציאת פרמטר: יש לקיים $0<(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a})$ פרבולה מחייכת ולכן ת"ה $x>\sqrt{a}$ או $x<-\sqrt{a}$ ומהנתון שת"ה $x>2$ או $x<-2$ נובע $\boxed{a=4}\leftarrow\sqrt{a}=2/^{\wedge 2}$

נתון: $a=2$ ומכאן ואילך $\boxed{f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2}}}$

ב.(1). ת"ה: $x>\sqrt{2}$ או $x<-\sqrt{2}$

ב.(2). אסימפטוטות: $\boxed{y=-1}$ $\Longleftarrow x\to-\infty$, $\boxed{y=1}$ $\Longleftarrow x\to\infty$ לפי יחס מקדמים.
אנכיות: $\boxed{x=-\sqrt{2}}$, $\boxed{x=\sqrt{2}}$ מכנה מתאפס ומונה לא.

ב.(3). קיצון:

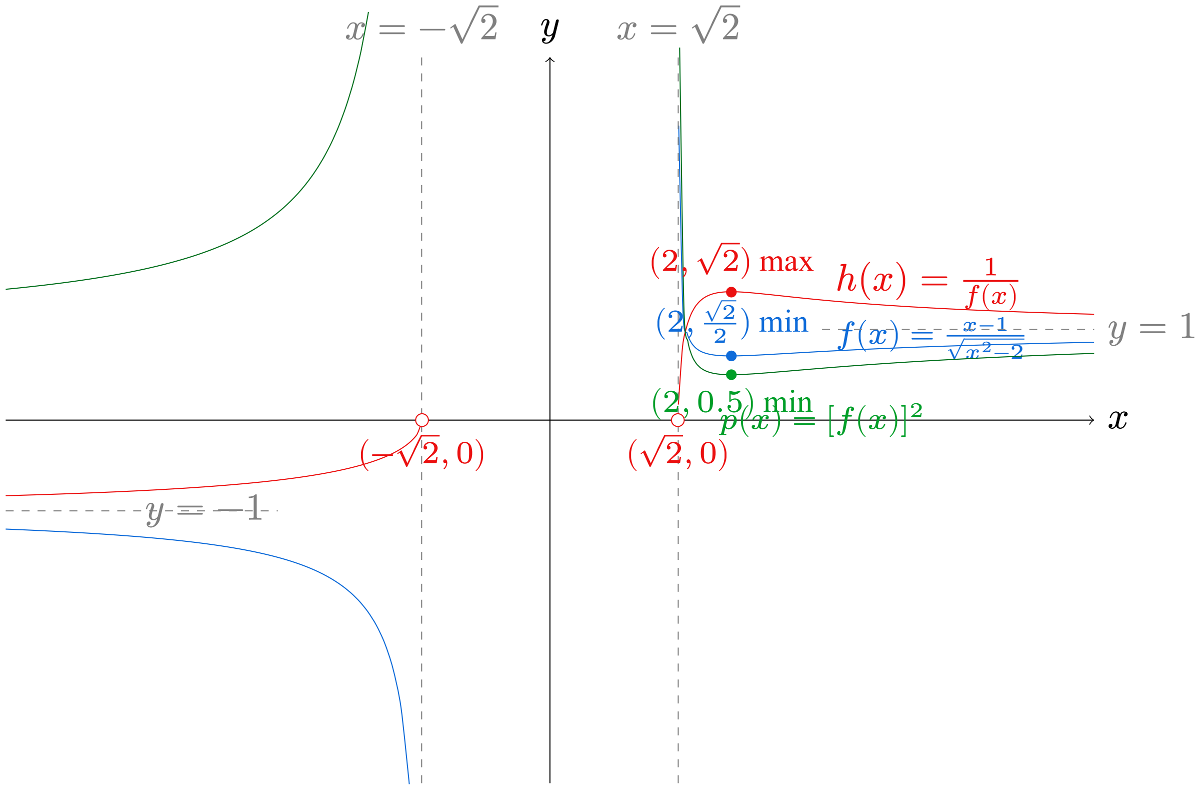
$$f'(x)=\frac{\sqrt{x^2-2}-\frac{\cancel{2}x(x-1)}{\cancel{2}\sqrt{x^2-2}}}{x^2-2}=\frac{\cancel{x^2}-2-\cancel{x^2}+x}{(x^2-2)\sqrt{x^2-2}}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{x-2}{\underbrace{(x^2-2)^{1.5}}_{\text{חיובי בת"ה}}}}$$

חשד קיצון: $x=2$ ניתן לקבוע סימני נגזרת לפי המונה (לא חייבים במקרה זה, אבל רצוי בשלב זה בכיתה יוד). נכין טבלה עם הערכים $-\sqrt{2},\sqrt{2},2$ (נק חשודות וקצות התחום).

x	$x<$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$x>$	2	3
y'	$-$			$-$	0	$+$
y	$\searrow$			$\searrow$	min $\left(2,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\nearrow$

ב.(4). סקיצת f , ד. סקיצת h:



ג. הזזה שמאלה ב-5 יחידות ולכן $\left(-3,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\ min$

ד. $\left(2,\sqrt{2}\right)\ max$ עליה הופכת לירידה וירידה הופכת לעליה.

ה $p\left(x\right)=\left[f\left(x\right)\right]^2$. כאשר הפונקציה המקורית חיובית, עליה נשארת עליה, וירידה נשארת ירידה (אם $y_2>y_1\geqslant 0$ גם $y_2^2>y_1^2$). בתחום בו הפונקציה מקורית שלילית היא הופכת לחיובית ותחומי עליה/ירידה מתהפכים.

בגרויות, לא כולל אינטגרלים

בגרות 7 ש6 (חורף 2011)

השאלה אינה מייצגת מבחינת רמת הקושי (נמוכה מדי).

נחקור את $f\left(x\right)=\frac{ax}{\sqrt{x^{2}-a^{2}}}$ עבור $a\neq0$

א.1. f מוגדרת כאשר $x^{2}-a^{2}>0$ כלומר $\left(x-a\right)\left(x+a\right)>0$ פרבולה, ולכן ת"ה:
$x>a\vee x<-a$.

א.2. אס' אופקית $y=a\Longleftarrow x\to\infty$, $y=-a\Longleftarrow x\to-\infty$ לפי יחס מקדמים.

אס' אנכית: $x=a,x=-a$ מכנה מתאפס, ומונה לא.

א.3. עליה וירידה:

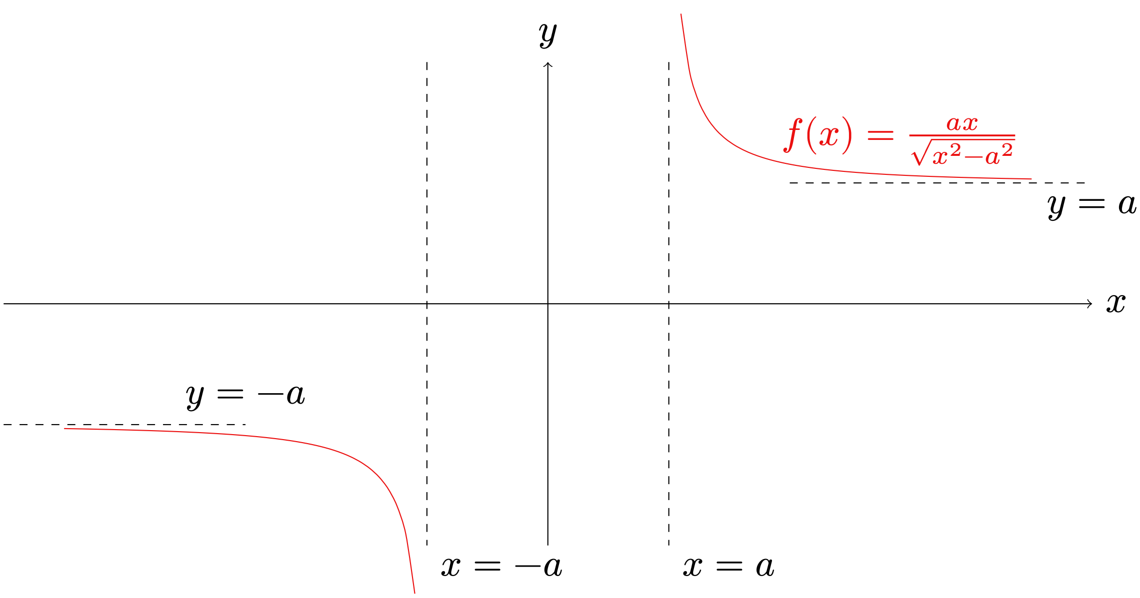
$$f'\left(x\right)=\frac{a\sqrt{x^{2}-a^{2}}-\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^{2}-a^{2}}}\cdot\cancel{2}x\cdot ax}{x^{2}-a^{2}}=\frac{a\left(\cancel{x^{2}}-a^{2}\right)-\cancel{ax^{2}}}{\sqrt{x^{2}-a^{2}}\left(x^{2}-a^{2}\right)}$$

$$=\boxed{\frac{-a^{3}}{\sqrt{x^{2}-a^{2}}\left(x^{2}-a^{2}\right)}<0\quad\forall x}$$

בדוקה נכונה, ומכאן שהפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה.

א.4. $x=0\to f\left(x\right)=0$ לא בת"ה, ולכן אין חיתוך עם ציר x וגם לא עם ציר y.

ב. סקיצה



ג. הפונקציה $g\left(x\right)=f\left(x\right)-a$ היא הזזה אנכית כלפי מטה ב-a. לכן הערכים שהפונקציה יכולה **יכולה להחזיר**, הם $g\left(x\right)>0$ או $g\left(x\right)<-2a$.

בגרות 9 ש6 (חורף 2012)

נחקור את $f\left(x\right)=\frac{x}{\sqrt{2x}-2}$

1א. ת"ה יש לקיים 2 תנאים $x\geqslant 0\wedge\sqrt{2x}\neq 2$

$$\sqrt{2x}\neq 2/^{\wedge 2}$$
$$2x\neq 4$$
$$x\neq 2$$

ומכאן שת"ה $\boxed{0\leqslant x<2\vee x>2}$ לשים לב שהפונקציה מוגדרת ב- $x=0$

2א. אס' אופקית: אין. חזקת מונה גדולה יותר. אס' אנכית: $\boxed{x=2}$ מכנה מתאפס ומונה לא.

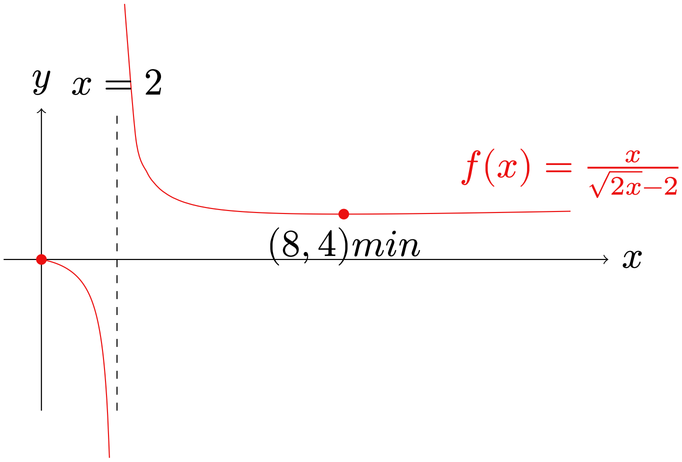
3א. $f\left(0\right)=0$ חיתוך עם שני הצירים $(0,0)$. אין נקודות התאפסות נוספות.

4א. קיצון:

$$f'\left(x\right)=\frac{\overbrace{\sqrt{2x}-2}^{v}-\overset{u}{x}\overbrace{\frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{2}\cdot\sqrt{2x}}}^{v'}}{\left(\sqrt{2x}-2\right)^{2}}=\frac{\sqrt{2x}-2-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}}}{\left(\sqrt{2x}-2\right)^{2}}$$
$$=\frac{2\sqrt{x}-2\sqrt{2}-\sqrt{x}}{\sqrt{2}\left(\sqrt{2x}-2\right)^{2}}$$
$$f'\left(x\right)\boxed{=\frac{\sqrt{x}-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}\left(\sqrt{2x}-2\right)^{2}}}\text{בדוקה}$$

ומכאן שהחשד לקיצון הוא ב- $\sqrt{x}=2\sqrt{2}\rightarrow x=8$. כיוון ש- $\sqrt{x}$ מונוטונית עולה, אז לפני $x=8$ הנגזרת שלילית, ואחרי חיובית ולכן מינימום ב- $(8,4)$. אין סיבה לבדוק שינוי סימן בטבלה עבור מונה כל כך פשוט.

5א. סקיצה.



ב. נתונה $g'(x)=f(x)f'(x)$ ומחפשים תחום ירידה של g. יש להניח שמדובר בסעיף חשיבה... למזלנו מחפשים ירידה של g ולא של ביטוי המכפלה שהוא g'. יש לתרגם זאת לדרישה $g'<0$, כלומר, מתי המכפלה הנתונה לנו שלילית. המכפלה שלילית כאשר סימן הנגזרת שונה מסימן הפונקציה. אז נבחר תחום בו הנגזרת שלילית והפונקציה חיובית, ו(אם קיים), נבחר גם תחום בו הנגזרת חיובית והפונקציה שלילית. במקרה שלנו כאשר הנגזרת חיובית גם הפונקציה חיובית. נותרנו רק עם התחום $\boxed{2<x<4}$ בו הפונקציה יורדת וחיובית.

נוסחאות אינטגרלים

אינטגרל לא מסויים:

הנוסחה הבסיסית לפולינום לכל $n \neq -1$:

$$\int ax^n dx = a\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

הנוסחה הכללית:

תהא $F(x)$ פונקציה קדומה של $f(x)$ אז:

$$\int f[u(x)] \cdot u'(x)\, dx = F[u(x)] + C$$

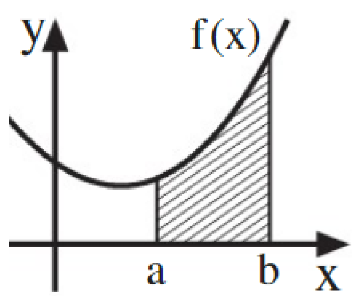
הנוסחה שסתם תופסת מקום בראש (יש בספר הרבה וריאציות כאלה), $n \neq -1$:

$\int (mx+b)^n dx = \frac{(mx+b)^{n+1}}{m(n+1)}$

אינטגרל מסויים:

תהי F פונקציה קדומה של f, כלומר, $(F(x))' = f(x)$ אז:

$$S = \int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$



כאשר S הוא השטח המסומן:

בגרויות, כולל אינטגרלים

בגרות 2010 קיץ - שלא נמצאת

נתונה $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2+x}}$ ראשית יש לחקור חקירה מלאה

א. ת"ה : נפתור אי שוויון $\boxed{x<-1 \vee x>0}$ $x^2+x>0 \rightarrow x(x+1)>0 \rightarrow$ פרבולה מחייכת.

א2. חיתוך צירים: $f(x)=0 \rightarrow 2x=0 \rightarrow x=0$ **מחוץ לת"ה** לכן אין חיתוך x, וגם אינה מוגדרת ב-0 לכן אין חיתוך y

א3. אס' $\boxed{y=2} \Longrightarrow x\rightarrow\infty$,

$\boxed{y=-2} \Longrightarrow x\rightarrow-\infty$

אס אנכיות $\boxed{x=-1}$. בדיקה בהצבה מראה ש-$x=0$ חור (בכיתה הסברנו למה המונה מתאפס יותר חזק מהמכנה במקרה זה):

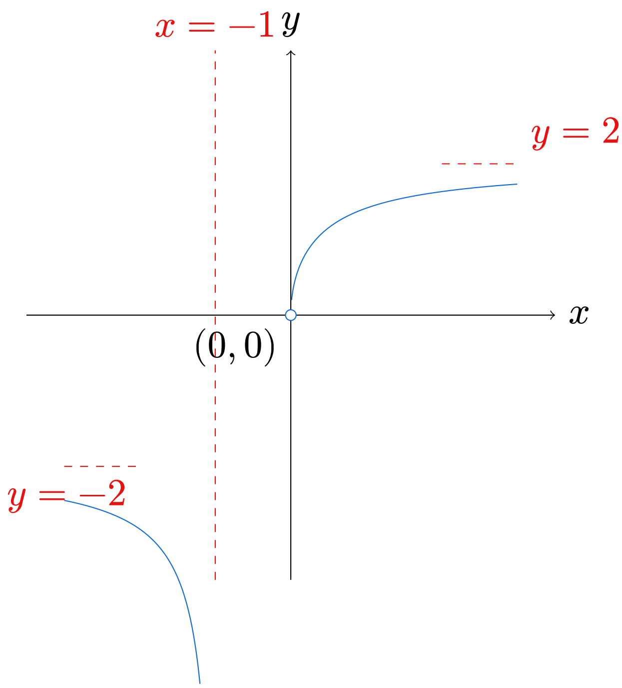
$f(x)=\frac{2\cancel{\sqrt{x}}\sqrt{x}}{\cancel{\sqrt{x}}\sqrt{x+1}}$ כלומר, עבור $x>0$ ניתן לצמצם ולקבל לאחר צמצום שיש התאפסות רק במונה. אין צורך לפתור ככה מספיק להראות טבלת ערכים מהמחשבון.

א.4

$$f'(x)=\frac{2\sqrt{x^2+x}-\frac{\cancel{2}x(2x+1)}{\cancel{2}\sqrt{x^2+x}}}{x^2+x}=$$
$$=\frac{\cancel{2x^2}+2x-\cancel{2x^2}-x}{(x^2+x)^{1.5}}$$
$$f'(x)=\boxed{\frac{x}{(x^2+x)^{1.5}}}$$

ונובע ישירות: עליה: $x>0$ ירידה $x<-1$ (המכנה חיובי בת"ה, ולכן הסימנים רק לפי המונה הפשוט שמתקבל, ואין צורך בטבלה)

ב. סקיצה:



ג. מקעירות מטה (נתון שאין פיתול אז הקעירות מטה תמידית) נובע שהנגזרת השניה שלילית בכל תחום ההגדרה, ולכן גרף I.

ד. שטח. חשוב לצייר סקיצה של השטח כמו תמיד כדי לא לטעות.

$$S=-\int_{1}^{2} f''(x)\,dx=-f'(x)\Big]_{1}^{2}=-\left(f'(2)-f'(1)\right)=f'(1)-f'(2)$$

$$=0.35355-0.136=\boxed{0.2176}\text{ יח''ש}$$

בגרות 4 ש8 (2010 מועד א)

א) מצא ת"ה של $f'(x)=\frac{6x^2+16x}{\sqrt{x^3+4x^2}}$

$f'(x)$ מוגדרת $\to x^3+4x^2>0$

$$\underbrace{x^2}_{\text{אי שלילי}}(x+4)>0 \to 0\neq x>-4 \to \boxed{-4<x<0 \lor x>0}$$

ב. אס' אנכית $x=-4$ (ב-$x=0$ יש חור. ניתן למצוא בהצבה סמוך ל-$x=0$)

ג. x_{max} נמצא בהתאפסות של $f'(x)$

$x(6x+16)=0 \to x_{max}=-\frac{16}{6}$

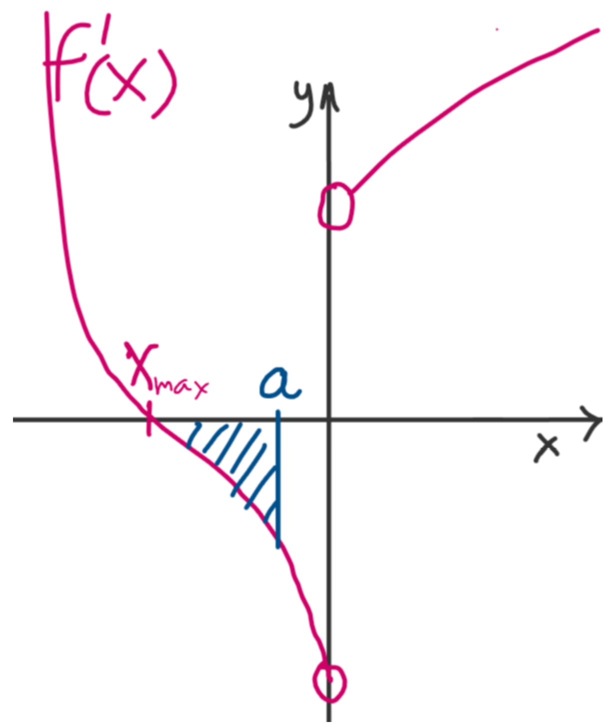
ד. עלייה: $f'(x)>0 \to$

$x<-2\frac{2}{3} \lor x>0$

ירידה: $-2\frac{2}{3}<x<0$

ה. נתון $f(a)=4\sqrt{3}$, $-2\frac{2}{3}<a<0$.

נתון שהשטח המוגבל על ידי $f'(x)$ על ידי ציר ה-x ועל ידי הישר $x=a$ הוא $\frac{28\sqrt{3}}{9}$.



יש למצוא את ערך הפונקציה בנקודת המקסימום.

$$S=\frac{28\sqrt{3}}{9}=-\int_{x_{max}}^{a}f'(x)dx=-\left(4\sqrt{3}-f(x_{max})\right)$$

ומקבלים מיידית $f(x_{max})=4\sqrt{3}+\frac{28\sqrt{3}}{9}=\frac{64\sqrt{3}}{9}$

הערה: בשום שלב לא חישבנו את האינטגרל. עבור סעיף ה' אין צורך לדעת את x_{max}

בגרות 32 $\frac{\sqrt{x^2+x-2}}{2x-a}$

נתון $-4 < a < 2$

א1) ת"ה: ארגומנט שורש אי שלילי:

$\boxed{x \leqslant -2 \ \vee \ x \geqslant 1}$ וגם $x \neq \frac{a}{2}$ (אילוץ מיותר לפי א2).

א2) מדוע אין אס' אנכית?

$\boxed{x \neq \frac{a}{2}} \rightarrow 2x \neq a$ ולפי הנתון מתקיים $-2 < \frac{a}{2} < 1$, לכן אם נניח בשלילה שמתקיים $x = \frac{a}{2}$ לצורך אס' אנכית אז מתקבל ש- x מחוץ לת"ה וזו סתירה. לכן אין אס' אנכית.

א3) לפי יחס מקדמים + השוואה לתשובות (בבחינה רק לפי מחשבון).

$$x \to \infty \Longrightarrow \boxed{y = 0.5}$$
$$x \to -\infty \Longrightarrow \boxed{y = -0.5}$$

א4) שיעורי חיתוך הם בקצות התחום, כלומר $\boxed{(-2,0)\,,(1,0)}$.

א5) בת"ה המונה חיובי והמכנה אינו משנה סימן (אחרת היה מתאפס, לכן מספיק לחשב מכנה עבור $x=-3$(שלילי) ועבור $x=2$(מכנה חיובי) מכאן שהפונקציה חיובית בתחום $x>1$ ושלילית בתחום $x<-2$.

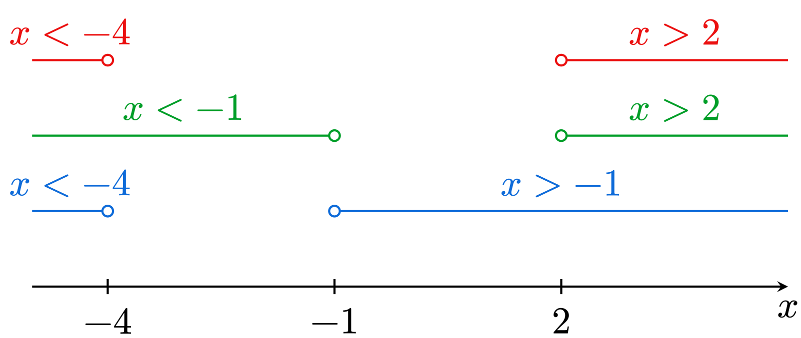
ב1)

$$f'(x) = \frac{\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x-2}} \cdot (2x-a) - 2\sqrt{x^2+x-2}}{(2x-a)^2} =$$
$$= \frac{(2x+1)(2x-a) - 4x^2 - 4x + 8}{2(2x-a)^2\sqrt{x^2+x-2}} =$$
$$= \frac{\cancel{4x^2} + 2x - 2xa - a - \cancel{4x^2} - 4x + 8}{2(2x-a)^2\sqrt{x^2+x-2}} =$$
$$f'(x) \boxed{= \frac{-2x - 2xa + 8 - a}{2(2x-a)^2\sqrt{x^2+x-2}}}$$

$$\begin{aligned} f'(x)=0 &\Longrightarrow -2x-2xa+8-a=0 \\ 8-a &= 2x(1+a) \\ &\boxed{x=\frac{8-a}{2a+2}} \end{aligned}$$

ב2) כדי למנוע התאפסות של $f'(x)$ צריך לקיים את מערכת אי השוויונות הבאה, שתוביל לכך שהפתרון אינו בתחום ההגדרה.

$$\begin{array}{rcl} -2< & \frac{8-a}{2a+2} & <1/\cdot(2a+2)^2 \\ -8a^2-16a-8< & (8-a)(2a+2) & <4a^2+8a+4 \\ -8a^2-16a-8< & 16a-2a^2-2a+16 & <4a^2+8a+4 \\ -6a^2-30a-24<0 & & 6a^2-6a-12>0 \\ (x<-4\vee x>-1) & \wedge & (x<-1\vee x>2) \end{array}$$



מחיתוך התחומים של אי השוויון הימני (בירוק) והשמאלי (בכחול) מתקבל (גרפית באדום)

$$\boxed{x<-4\vee x>2}$$

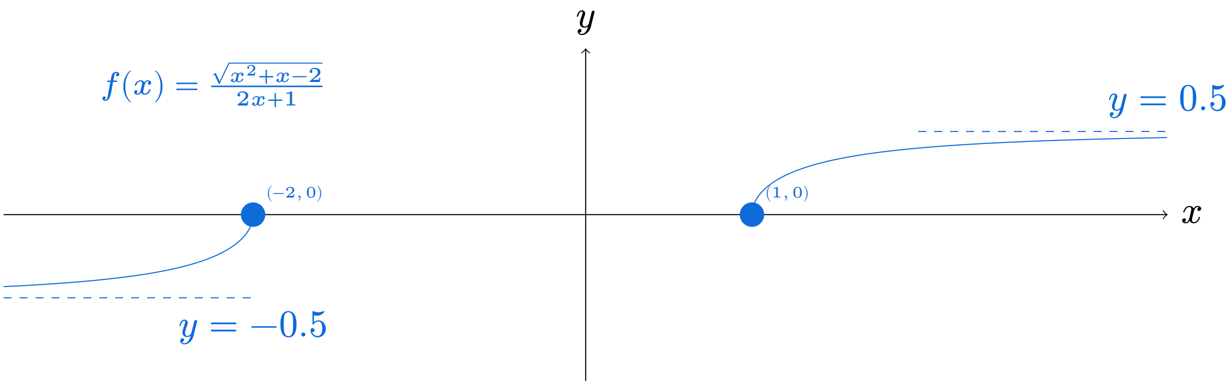
וזה מחוץ לת"ה של a. לכן כל שנותר הוא $\boxed{a\neq-1}$ (שמאפס את המכנה של אי השוויון). **הזוי זו לא מילה**.

ג1)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sqrt{x^2+x-2}}{2x+1} \\ f'(x) &= \frac{\cancel{-2x+2x}+9}{2(2x+1)^2\sqrt{x^2+x-2}} \underset{\text{בת"ה}}{>} 0 \end{aligned}$$

עליה: $x<-2$, $x>1$, ירידה: אין

ג2) סקיצה:



$$\int_3^4 \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x-2}}dx \overset{\text{ניחוש}}{=} \overset{\substack{\text{תיקון מקדם}\\ \downarrow}}{2} \sqrt{x^2+x-2}\,\Big]_3^4 = \overbrace{8.485}^{F(4)} - \overbrace{6.325}^{F(3)} = \boxed{2.16_{\text{יח"ר}}}$$

$$\left(\overset{\text{נגזור לבדיקה}}{\sqrt{x^2+x-2}}\right)' = \frac{2x+1}{\underset{\text{קטן פי 2}}{2}\sqrt{x^2+x-2}}$$

זו דוגמא לאינטגרל שניתן וצריך לבדוק במחשבון עם $\int_{\square}^{\square}\square$.

בגרות 37 חורף תשפ"א 2021 מועד א ש' 6

נתונה $f(x) = 6x\left(x^3-1\right)^3$.

א1) חיתוך צירים: $\boxed{x=0}$ ו- $\boxed{x=1}$ $\leftarrow x^3=1 \leftarrow x^3-1=0$

$$x^3-1=0 \rightarrow x^3=1 \rightarrow \boxed{x=1}$$

א2) קיצון:

$$f'(x) = 6\left(x^3-1\right)^3 + 18x\left(x^3-1\right)^2 \cdot 3x^2 = 6\left(x^3-1\right)^2 \underbrace{\left(x^3-1+9x^3\right)}_{10x^3-1}$$

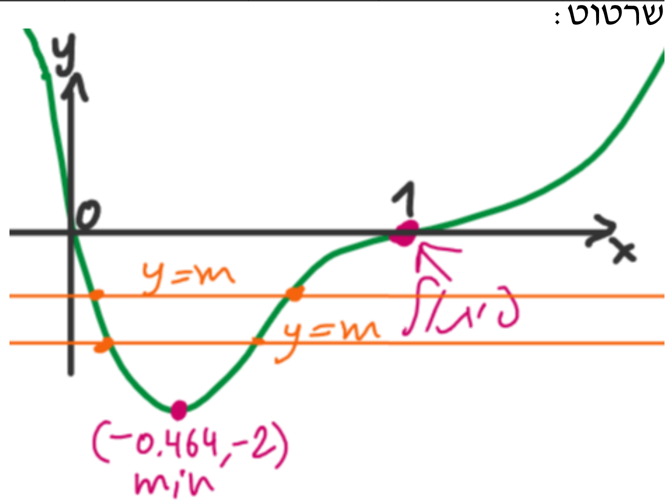
חשודות:

$$f'(x) = 0 \rightarrow x = 1, x = \sqrt[3]{\frac{1}{10}} = -0.464$$

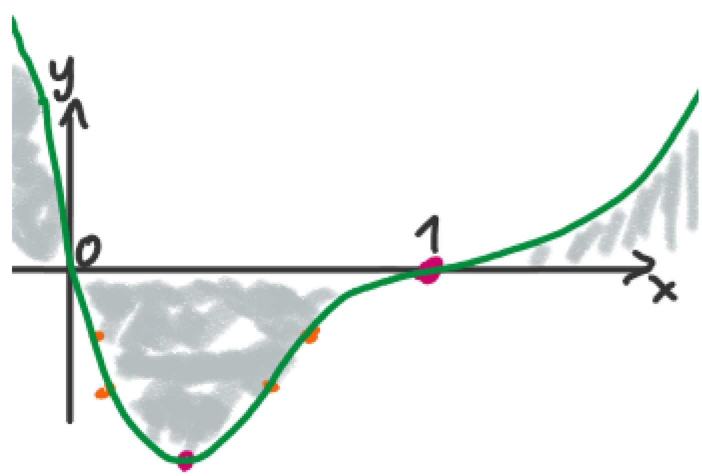
נכין טבלה עם הערכים $-0.464, 0$.

x	-0.5	-0.464	-0.25	0	0.25
y'	$-$		$+$	0	$+$
y	$\searrow$	min $(-0.464, -2)$	$\nearrow$	פיתול $(1,0)$	$\nearrow$

שרטוט:



האם קיים x עבורו ערך האינטגרל מינימלי?



בגרות 41 עמ'228 שאלה 6, שיטת ההצבה

$f(x) = \frac{\sqrt{1-2x}}{x^2-x}$

ת"ה $\leftarrow x(x-1) \neq 0 \wedge 1-2x \geqslant 0$

$x \neq 0 \wedge x \neq 1 \wedge x \leqslant 0.5$

ומכאן שת"ה (כאיחוד תחומים) הוא : $\boxed{x < 0 \quad \vee \quad 0 < x \leqslant 0.5}$

א2) $f(x) = 0 \rightarrow x = 0.5$ חיתוך עם ציר x ב- $(0.5, 0)$. אין חיתוך עם ציר y.

א3) אס' אנכיות : $x = 0$ מכנה מתאפס ומונה לא.

אס' אופקית : $y = 0$ (מעריך חזקת מכנה גבוה ממעריך חזקת מונה).

א4) $$f'(x) = \frac{\frac{1\cdot\cancel{(-2)}^{-1}}{\cancel{2}\sqrt{1-2x}}\cdot(x^2-x)-(2x-1)\sqrt{1-2x}}{(x^2-x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-(x^2-x)-(2x-1)(1-2x)}{\sqrt{1-2x}(x^2-x)^2} = \frac{-x^2+x+(2x-1)^2}{\sqrt{1-2x}(x^2-x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-x^2+x+4x^2-4x+1}{\sqrt{1-2x}(x^2-x)^2} = \frac{3x^2-3x+1}{\sqrt{1-2x}(x^2-x)^2}\boxed{> 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}}$$

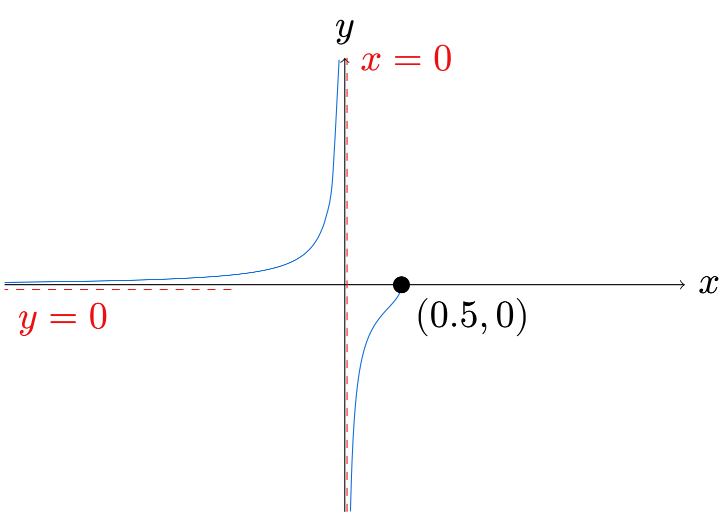
הפונקציה עולה בתחום $x < 0 \quad \vee \quad 0 < x \leqslant 0.5$

כמובן שאת נכונות הנגזרת הזו בודקים, כדי לא לחליט החלטות נמהרות לגבי העליה (והעדר הצורך בטבלה).

כיום בקבוצות ממליצים להימנע מהמשפט "עולה בכל תחום הגדרתה" (כי ניתן למצוא ערכי x לפני ואחרי האסימפטוטה שההפרש בינהם שלילי במקום חיובי) ולרשום בנפרד את שני תחומי העליה.

(קיצון קצה - מקסימום מקומי $x = 0.5$) לא שאלו קיצון אז אין חובה לציין זאת.

ב. סקיצה :



ג. בהינתן $f(k) = 1$, $t < k$ מתקיים $\forall t < k,\, f(t) < 1$ בזכות עליית הפונקציה.

לכן מתקיים $\forall t < k,\, f(t)^2 < f(t)$ (תכונה של מספרים בין 0 ל-1 : כשמעלים אותם בריבוע הם קטנים).

ולכן גם האינטגרל של f יהיה גדול יותר.

של $\left(f\left(x\right)\right)^2$ יהיה **קטן** יותר, שכן תהא צבירה של ערכים (**חיוביים** חשוב לשים לב) **קטנים** יותר!

ד.

$$\int_{-8}^{-1}\left(f\left(x\right)\right)^2dx=\int_{-8}^{-1}\frac{1-2x}{\left(x^2-x\right)^2}dx\underset{\begin{pmatrix}t=\boxed{x^2-x}\\ \frac{dt}{dx}=2x-1\\ dt=\left(2x-1\right)\cdot dx\end{pmatrix}}{=\!=\!=\!=\!=}\int^{**}\frac{-1}{t^2}dt=t^{-1}$$

** חשוב לא לרשום גבולות כאן כי ביחס ל-dt זה פשוט לא נכון (הגבולות הן במונחי x לא במונחי t).

$$=\frac{1}{x^2-x}\Bigg|_{-8}^{-1}=\frac{1}{1+1}-\frac{1}{64+8}=\boxed{\frac{35}{72}}$$

בגרות 38 ש 6 עמ 203

$x^2-16>0 \rightarrow (x+4)(x-4)>0$

ת"ה $x<-4 \ \vee \ x>4$

ב) אס' אופקיות $y=a, y=-a$ (מעריך חזקה במונה שווה למכנה, אז לפי יחס מקדמים.

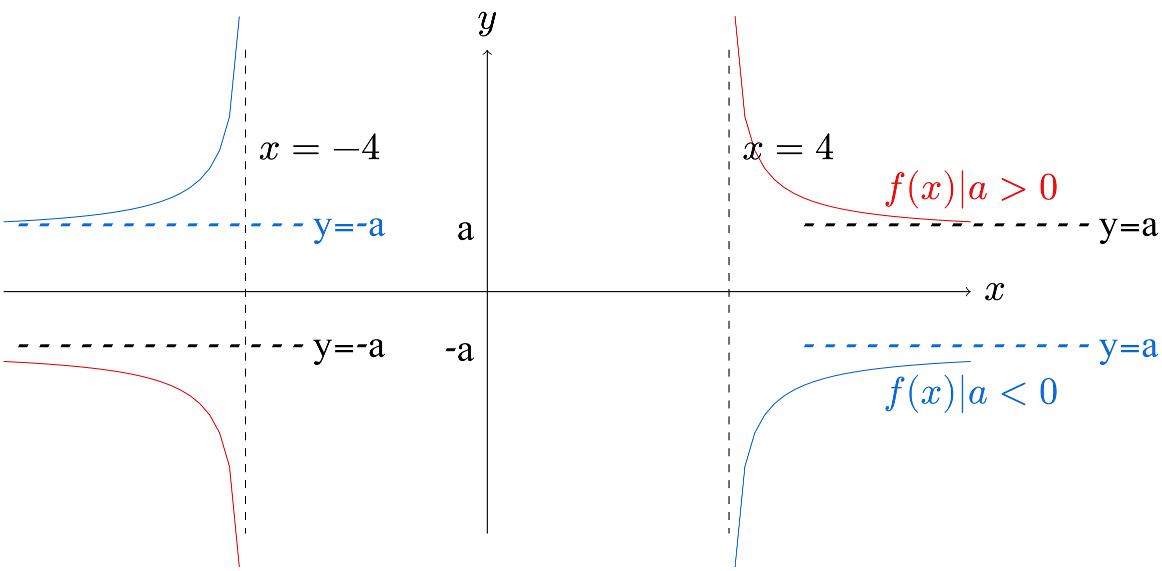
אס' אנכיות $x=4, x=-4$ (מכנה מתאפס ומונה לא).

ג)

$$f'(x)=\frac{a\sqrt{x^2-16}-\frac{ax\cdot\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2-16}}}{x^2-16}=\frac{\cancel{ax^2}-16a-\cancel{ax^2}}{(x^2-16)^{1.5}}$$

ומכאן שהפונקציה יורדת לכל x.

ד)ה) סקיצה.



ו 1) g שלילית כאשר מתקיים $f>0 \ \wedge \ f'<0$, כלומר כאשר $x>4$ (המקרה האחר - כאשר $f'>0 \wedge f<0$ לא מתקיים לעולם).

$$\int_5^6 -g(x)dx \underset{\text{ניחוש}}{=} \left[-\frac{f^2(x)}{2}\right]_5^6=\left[-\frac{x^2}{2(x^2-16)}\right]_5^6=\frac{-36}{2(20)}--\frac{25}{2(9)}=\boxed{\frac{22}{45}}$$

בדיקה:

$$\left(-\frac{f^2(x)}{2}\right)'=-\frac{\cancel{2}f(x)f'(x)}{\cancel{2}}$$

בגרות 21 שאלה 7

נתונה $\frac{x}{\sqrt{x^2+9}} = f'(x)$ נשים לב כי לפרבולה בתוך השורש במכנה אין שורשים, ולכן המכנה לא מתאפס והנגזרת מוגדרת לכל x.

זו המסקנה מכך שלאי-השוויון $x^2+9=0$ אין פתרון ($x^2+9>0$ מתקיים לכל x)

א.

$\sqrt{x^2+9}+c \overset{\text{ניחוש}}{=} f(x)=\int f'(x)dx$ נגזור לבדיקה:

$\left(\sqrt{x^2+9}+c\right)' = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+9}}$ הניחוש מוצלח - אין צורך בתיקון מקדם.

הישר הנתון $y=\frac{1}{3}x+3$ חותך את הפונקציה בנקודה ב-$x=0$ כלומר ב-$(0,3)$

כלומר $f(0)=3=\sqrt{0+9}+c \to c=0$

ומכאן $f(x)=\sqrt{x^2+9}$ פונקציה שנראית קצת כמו פרבולה מדוכאת (יש לה אסימפטוטות משופעות - שאינן בחומר).

ב1) כאמור לעיל f' מוגדרת לכל x וכך גם f. ניתן כמובן לוודא זאת גם בהצבות במחשבון ובסקיצה בעזרת מחשבון - לא כדי להגיש - אבל כדי להבין טוב מה קורה בשאלה. הדבר נכון לכל אורך השאלה (ושאלות מסוג זה) והודגש בשיעור ובמבחן.

ב2) לנגזרת אסימפוטוטות $y=1, y=-1$ (נשים לב כי אמנם הנגזרת מתנהגת "כמו" $\frac{x}{x}$ (ולכן רבים הסיקו $y=1$) אבל כפי שראינו בפונקציות שורש, האסימפטוטות ב- ∞ וב- $-\infty$ שונות!!! ההתנהגות היא אמנם כמו $\frac{x}{x}$ אבל המכנה תמיד חיובי, והמונה הופך סימן. שוב קל לראות זאת במחשבון !!! **חזרתי על נושא ציור הארנבים אין ספור פעמים.**

ב3) $f'(x)=0 \to x=0$ ומכאן $(0,0)$ חיתוך עם ציר ה-x וציר y.

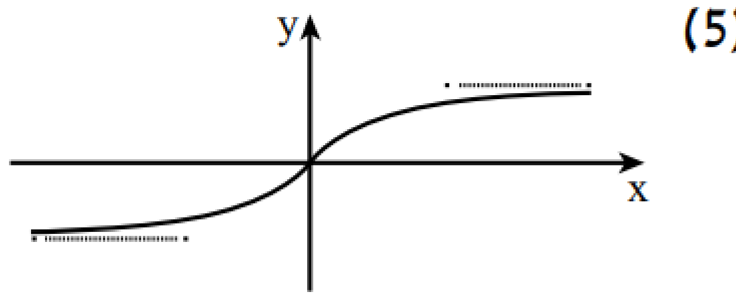
ב4) הנגזרת f' **עולה בכל תחום הגדרתה**. ניתן לראות זאת לאחר גזירה:

$f''(x)=\frac{1\sqrt{x^2+9}-x\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+9}}}{x^2+9}=\frac{\cancel{x^2}+9\cancel{-x^2}}{\sqrt{x+9}(x^2+9)}$ אינה מתאפסת.

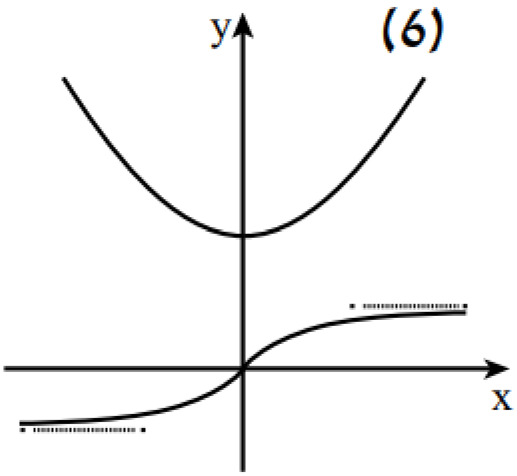
לכן החיתוך עם הצירים של f' ב- $(0,0)$ מייצג את נקודת המינימום של f (f' משנה כאן סימן)

ב5,6) העתקתי מיואל, ואתם יכולתם להעתיק מקסיו (או יותר נכון להשוות למחשבון. כי לא ראוי שיופיעו נקודות של הצבת מחשבון בסקיצה שלכם).

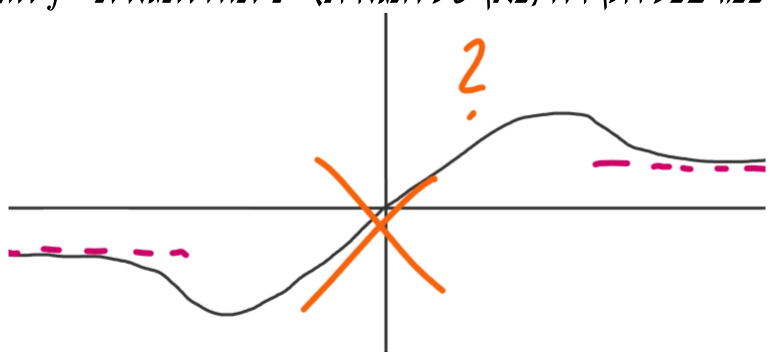
שימו לב שסקיצת נגזרת כזו, כאשר לא רשמתם אסימפטוטות נכונות (אם שכחתם אסימפטוטה) ו/או לא הוכחתם "עולה בכל תחום הגדרתה" היא חשד להעתקה...



$.\ 1 \le k < 3$



כמו בכל חקירה (כאן של הנגזרת) - **ניתוח הנגזרת** f'' **הוא זה שמאפשר לקבוע** ש-f' לא נראית ככה למשל:



ג. כיוון שהערך המינימלי של הפונקציה הוא 3, נובע $1 \leqslant k < 3$. כל שנדרש הוא סקיצות טובות, וקביעה ש-$(0,3)$ היא מינימום של $\sqrt{x^2+9}$. כל k בתחום זה יתן ישר המקביל לצירים שעובר בין הפונקציות. ערכי k נעים בין המינימום של f (3) (לא כולל!) לחסם העליון של f' (1, **כולל**!!!) (המושג אינו בחומר, אבל לכתוב מקסימום של f' יהיה שגיאה, והרעיון האינטואיטיבי ברור שיתכן $k=1$ כי הנגזרת אף פעם לא תיגע בערך זה, רק תשאף אליו).

בגרות 29 שאלה 6

נתונה $f\left(x\right)=\frac{ax-1}{\sqrt{ax^2-2x+1}}$, a הוא פרמטר.

נתון: הפונקציה מוגדרת לכל x.

א. הוכח: $a>1$.

הוכחה: $ax^2-2x+1>0$ לכל x מכאן שהדיסקרימיננטה שלילית.

כלומר $b^2-4ac<0$.

$4-4a<0\rightarrow\boxed{a>1}$. ■

ענה על סעיף ב' אם יש צורך הבע באמצעות a.

ב(1) מצא את שיעורי נק' החיתוך של גרף הפונקציה $f\left(x\right)$ עם הצירים.

חיתוך: $\frac{1}{a}$ $ax-1=0\rightarrow x=$ ומכאן $\left(\frac{1}{a},0\right)$ עם ציר x.

$f\left(0\right)=\frac{-1}{\sqrt{1}}=-1$ ומכאן $\left(0,-1\right)$ עם ציר y.

ב(2) כתוב את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f\left(x\right)$ המקבילות לציר ה-x.

לפי מעריכי חזקה גבוה שווים ניתן לקבוע את האסימפטוטה האופקית לפי יחס המקדמים ולכן:

$y=\sqrt{a}$ כאשר $x\rightarrow\infty$ ו- $y=-\sqrt{a}$ כאשר $x\rightarrow-\infty$.

ב(3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f\left(x\right)$ (אם יש כאלה).

עלייה:

$$f'\left(x\right)=\frac{a\left(\sqrt{ax^2-2x+1}\right)-\frac{\left(\cancel{2}ax-\overset{1}{\cancel{2}}\right)\cdot\left(ax-1\right)}{\cancel{2}\sqrt{ax^2-2x+1}}}{ax^2-2x+1}$$

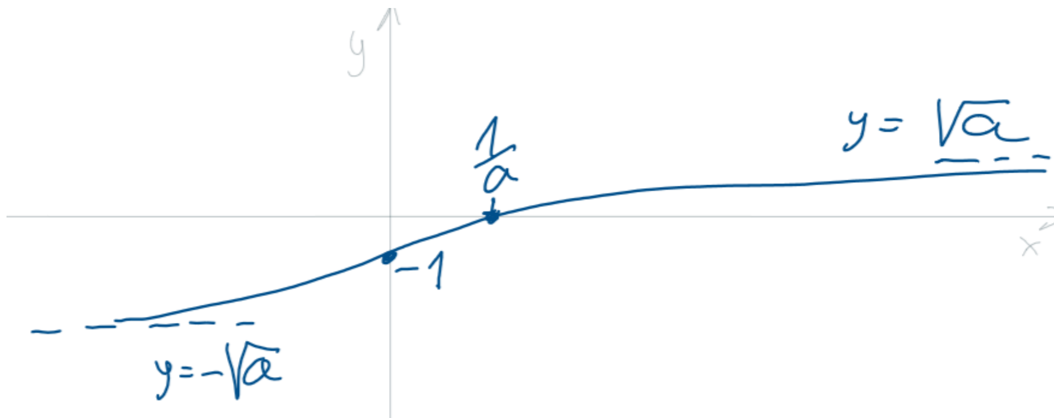
$$=\frac{a\left(ax^2-2x+1\right)-\left(ax-1\right)^2}{\left(ax^2-2x+1\right)^{1.5}}$$

$$=\frac{\cancel{a^2x^2-2ax}+a-\left(\cancel{a^2x^2-2ax}+1\right)}{\left(ax^2-2x+1\right)^{1.5}}$$

$$f'\left(x\right)=\boxed{\frac{a-1}{\left(ax^2-2x+1\right)^{1.5}}}>0\quad\forall x\in\mathbb{R}$$

כיוון ש-$a>1$ המונה חיובי. כיוון גם המכנה חיובי, **הפונקציה עולה לכל** x.

ב(4) **סרטט** סקיצה של גרף הפונקציה $f\left(x\right)$.



נתון: $a=3$.

הערה: הזדמנות פז לבדיקה: $f'=\frac{2}{(3x^2-2x+1)^{1.5}}$, $f=\frac{3x-1}{\sqrt{3x^2-2x+1}}$. נגזרת נכונה. חיתוכים נכונים.

ג. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי ציר ה-x, ועל ידי הישרים $x=\frac{1}{3}$ ו-$x=2$.

פתרון: השטח הנ"ל שווה לאינטגרל של הפונקציה בתחום הנתון שכן היא אינה משנה סימן.

$$\int_{\frac{2}{3}}^{2} f(x)\,dx \overset{\text{ניחוש}}{=} \left[\sqrt{3x^2-2x+1}\right]_{\frac{2}{3}}^{2} = \sqrt{12-4+1}-\sqrt{3\cdot\frac{4}{9}-2\cdot\frac{2}{3}+1} =$$

$$= \boxed{2}$$

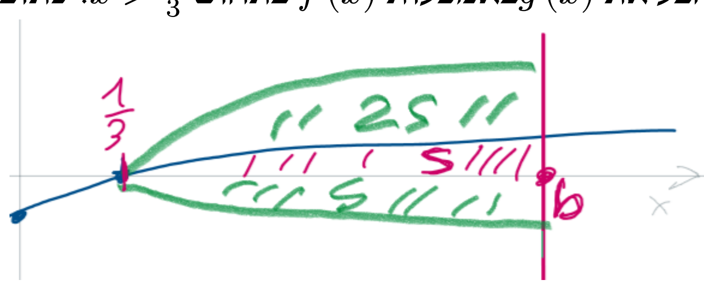
נגזור לבדיקה (בדיקת ניחוש): $\left(\sqrt{3x^2-2x+1}\right)' = \frac{1\cdot(6x-2)}{2\sqrt{3x^2-2x+1}}$. מוש.

ד. $g(x)$ היא פונקציה רציפה המוגדרת לכל x.

נסמן ב-S את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי ציר ה-x, ועל ידי הישרים $x=\frac{1}{3}$ ו-$x=b$, ($b>\frac{1}{3}$).

נתון: השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי גרף הפונקציה $g(x)$ ועל ידי הישרים $x=\frac{1}{3}$ ו-$x=b$ שווה ל-$2S$ בעבור כל b.

הבע את $g(x)$ באמצעות $f(x)$ בתחום $x>\frac{1}{3}$. כתוב את 2 האפשרויות. אין צורך להוכיח את תשובתך.



אפשרות אחת: $\boxed{g(x)=3f(x)}$

אפשרות שניה: $\boxed{g(x)=-f(x)}$

בשני המקרים ההפרש בין הפונקציות יהיה $2f(x)$ ונקבל שטח כרצוי. הסקיצה לעיל גם עוזרת להסיק ולהבין את זה וגם לשכנע שלא העתקתם.

בגרות 45 שאלה 6 (לא שורש אבל אינטגרל מצטבר)

נתונה $f(x)=2x+\frac{2}{x}$ מוגדרת ל- $x\neq 0$

$f(-x)=2\cdot(-x)-\frac{2}{x}=-\left(2x+\frac{2}{x}\right)=-f(x)$

ולכן אי-זוגית

א3) עליה / ירידה:

$$f'(x)=2-\frac{2}{x^2}$$

$$f'(x)=0 \rightarrow 2=2x^2 = \rightarrow x=\pm 1$$

טבלה (נגזרת בדוקה תקינה):

נכין טבלה עם הערכים $-1,0,1$

x	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5
y'	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	max $(-1,4)$	$\searrow$		$\searrow$	min $(1,4)$	$\nearrow$

ב. שרטוטים: גרף 2 הוא גרף f (לפי עליה וירידה, ראה טבלה), גרף iii הוא גרף f' (לפי חיוביות, ראה טבלה)

ומה שנותר הוא גרף i למכפלה g.

ג. g תחתוך את הצירים כאשר f או f' מתאפסות, ולכן $(1,0)$, $(-1,0)$ (נק' חיתוך צירים של f'. f לא נוגעת בצירים)

ד. האינטגרל $\int f(x)\,f'(x)\,dx \overset{\text{ניחוש}}{=} 0.5f^2(x)+c$ נגזור לבדיקה:

$(0.5f^2(x)) = f(x)\,f'(x)$ כרצוי

בשאלה זו ניתן היה לבצע ממש את המכפלה, ולבצע אינטגרציה, אבל לא בכל פונקציה תוכלו לבצע אינטגרל כזה בחישוב, עם כלים של תיכון.

השטח הוא סכום שני שטחים:

$$-0.5f^2(x)\Big]_{0.25}^{1}+0.5f^2(x)\Big]_{1}^{4}=$$
$$0.5\left(f^2(4)-2f^2(1)+f^2(0.25)\right)=$$
$$0.5\,(72.25-2\cdot 16+72.25)=56.26$$

ה. צריך לשים לב שכאן **אין הפרדת תחומים**,

עבור $a>1$

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{a}}^{a} g\left(x\right)dx &= 0.5\left(f^2\left(a\right)-f^2\left(\frac{1}{a}\right)\right)\\ &= 0.5\left(\left(2a+\frac{2}{a}\right)^2-\left(2\frac{1}{a}+\frac{2}{\frac{1}{a}}\right)^2\right)\\ &= 0.5\left(\left(2a+\frac{2}{a}\right)^2-\left(\frac{2}{a}+2a\right)^2\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

ו. האינטגרל המצטבר הנתון צובר שטח חיובי בכל התחום (שכן f חיובית), ולכן **עולה** בכל תחום ההגדרה. מכאן נובע שהקיצון היחיד הוא קיצון קצה מינימום $(1,0)$ (בתחילת התחום השטח הצבור הוא 0).

בגרות 42 שאלה 6

$a>0$,$f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}$

א. תחום הגדרה: $\boxed{x>a \vee x<-a}$ $\underset{(x-a)(x+a)\text{ פרבולה מחייכת}}{\Longrightarrow}$ $x^2-a^2>0$

ב. $\underset{\text{ולכן זוגית}}{f(x)}=\frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{(-x)^2}{\sqrt{(-x)^2-a^2}}=f(-x)$

ג.(1) 0 לא בת"ה לכן $f(0)$ לא מוגדר (ובטח שלא שווה ל-0) ← אין חיתוך עם y.
$x^2=0 \rightarrow f(x)=0$ אבל שוב $x=0$ לא בת"ה ולכן אין חיתוך עם x.

ג.(2) אס' אנכית: $\boxed{x=a,\ x=-a}$ מכנה מתאפס ומונה לא.
אס' אופקית: אין (מעריך חזקה במונה גדול יותר מבמכנה).

ג.(3) קיצון:

$$f'(x)=\frac{2x\sqrt{x^2-a^2}-\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2-a^2}}\cdot x^2}{x^2-a^2}$$
$$=\frac{2x\left(x^2-a^2\right)-x^3}{\left(x^2-a^2\right)\sqrt{x^2-a^2}}$$
$$=\frac{x^3-2xa^2}{x^2-a^2\sqrt{x^2-a^2}}=\boxed{\frac{x\left(\overbrace{x^2-2a^2}^{\text{פרבולה מחייכת}}\right)}{\underbrace{\left(x^2-a^2\right)^{1.5}}_{\text{חיובי בת"ה}}}=f'(x)}$$

$$f'(x)=0\rightarrow x\left(x-\sqrt{2}a\right)\left(x+\sqrt{2}a\right)=0$$

$x=\pm\sqrt{2}a$ חשודות לקיצון

$x=0$ לא בת"ה

מניתוח המונה, עבור x חיובי נקבל (מפרבולה מחייכת):

$$x>\sqrt{2}a\rightarrow f'>0$$
$$x<\sqrt{2}a\rightarrow f'<0$$

ועבור x שלילי, (הפרבולה מחייכת אבל הסימנים מתהפכים עקב הכפל ב-x):

$$x > -\sqrt{2}a \rightarrow f' > 0$$
$$x < -\sqrt{2}a \rightarrow f' < 0$$

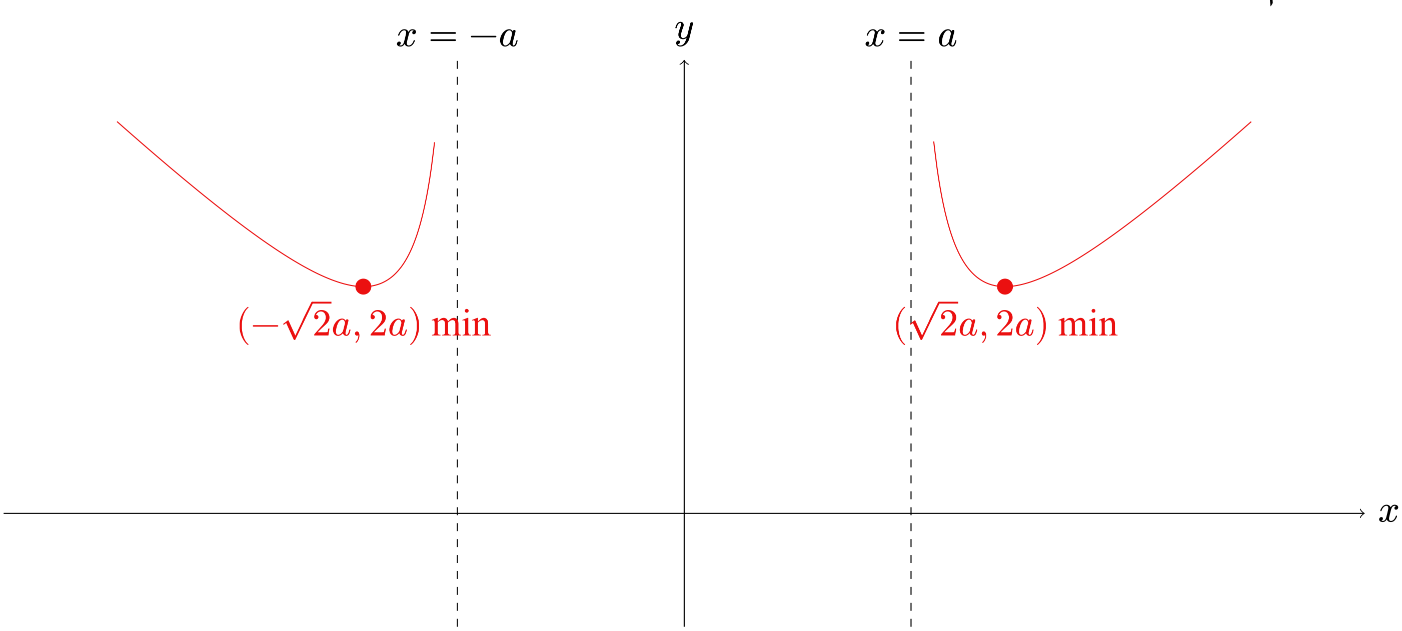
כלומר שתי הנקודות הן מינימום. הצבה בטבלה מעט יותר מסורבלת (ולא הכרחית). בכל מקרה אסור לרשום "הצבתי $a = 3$" במחשבון כדי לחשב את סימני הנגזרת. חובה לחשב את ערך המונה עם פרמטר **במקרה שהפרמטר אינו פתור** (כמו ברוב הבגרויות, אך **פחות רלוונטי לבחינת סוף יוד**). לכן הניתוח האיכותני לעיל חשוב, וחוסך את הטבלה. הנחת מוצא היא שאתם בכל מקרה נמצאים ב-$menu9$ ורואים שהתוצאות שלכם אכן כפי שטענתם.

אופציה נוספת - נגזרת שניה "מונה בלבד":

$$\underset{\text{מונה בלבד}}{f''(x)} = x^2 - 2a^2 + 2x^2 = 3x^2 - 2a^2$$

$$f''\left(\pm\sqrt{2}a\right) = 3\underbrace{\left(\pm\sqrt{2}a\right)^2}_{2a^2} - 2a^2 > 0$$ קעורה מעלה

ג.(4) סקיצה:

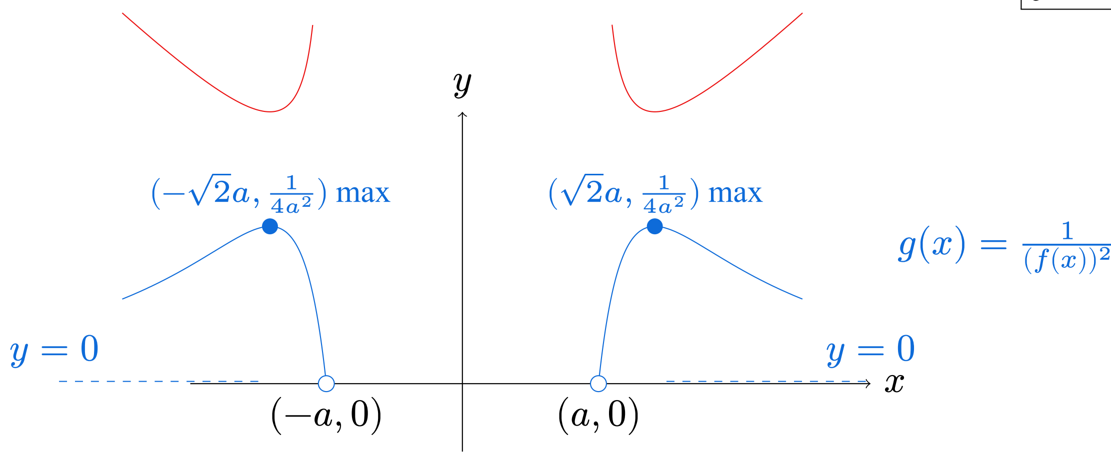


ד. מציאת נקודות הקיצון של $f(x)^2$: הטרנספורמציה $()^2$ שומרת עליה כעליה, וירידה כירידה (אם $0 < y_1 < y_2$ גם $y_1^2 < y_2^2$ ולהפך). ניתן להוכיח גם אלגברית: $\left(f(x)^2\right)' = \underbrace{2f(x)}_{\text{כאן חיובי}}f'(x)$

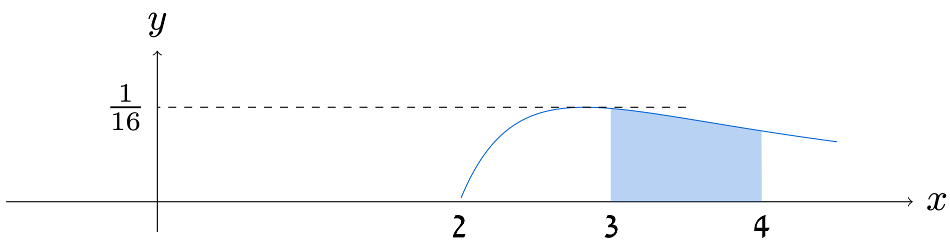
ומכאן שכל עוד הפונקציה חיובית, סימני הנגזרת זהים לסימני הנגזרת f'. לכן נקודות הקיצון $\boxed{\left(\pm\sqrt{2}a, 4a^2\right) min}$. ניתן ללמוד גם כי אם הפונקציה שלילית מתקיים ההפך. אם הפונקציה

חותכת את ציר x - יש לנתח לפי קדם אנליזה.

ה. הטרנספורמציה $g\left(x\right)=\frac{1}{f\left(x\right)^{2}}$ משפיעה במקרה זה כמו $\frac{1}{f(x)}$. נקודות הקיצון הופכות למקסימום $\boxed{\left(\pm\sqrt{2}a,\frac{1}{4a^{2}}\right)\ max}$, מתקבלים חורים ב-$(0,\pm a)$ ואסימפטוטה אופקית $x\ \rightarrow\ \pm\infty\implies$ $\boxed{y=0}$



ו. שטח כאשר $a=2$:



ראשית יש לשים לב כי:

$$\int_{3}^{4}\frac{1}{\left(f\left(x\right)\right)^{2}}dx\neq-f\left(x\right)^{-1}$$

ולכן נבחן את הפונקציה עצמה, וגם בה, אין מצב של זיהוי נגזרת פנימית! הפתרון הוא בפיצול השבר:

$$S=\int_{3}^{4}\left(\frac{\sqrt{x^{2}-2^{2}}}{x^{2}}\right)^{2}dx=\int_{3}^{4}\frac{x^{2}-4}{x^{4}}dx=\int_{3}^{4}x^{-2}-4x^{-4}dx=-x^{-1}+\frac{4}{3}x^{-3}\Big]_{3}^{4}$$

$$=-0.25+\frac{4}{3\cdot4^{3}}-\left(-\frac{1}{3}+\frac{4}{3\cdot3^{3}}\right)=\boxed{\frac{71}{1296}}$$

$\approx0.0548<\frac{1}{16}$ כצפוי ורצוי לבדוק במחשבון