חקירת פונקציה רציונלית

גיא סידס

31 בינואר 2025

תוכן העניינים

נוסחת נגזרת מנה

$$\left(\frac{u\left(x\right)}{v\left(x\right)}\right)^{\prime}=\frac{\overbrace{u^{\prime}v}^{\text{לגזור מונה כפול לשמור}}\quad-\quad\overbrace{uv^{\prime}}^{\text{לשמור כפול לגזור}}}{v^{2}}=\frac{u^{\prime}v-v^{\prime}u}{v^{2}}$$

כמו נגזרת מכפלה - רק עם מינוס בין שני הביטויים. במכפלה - אם יש טעות בסדר אין בעיה. במנה - **טעות בסדר**$\leftarrow$**נגזרת שגויה** (סימן הפוך).

לא רצים ישר לגזור!!!

1. **נגזרת מנה עדיף להימנע**: $\boxed{-2\cdot\frac{1}{x^{3}}}=-2x^{-3}=\left(x^{-2}\right)^{\prime}=\left(\frac{1}{x^{2}}\right)^{\prime}$ את זה, לא גוזרים כמנה
2. **לצמצם** כמה שניתן לפני גזירה (באופן כללי לא לרוץ לגזור, אלא לחשוב טיפה). **לרשום לעצמנו - נקודת האפס שצמצמנו תהיה אסימפטוטה או חור**:

$$f(x)=\frac{(x-2)^{\cancel{3}\,2}}{\cancel{(x-2)}\,(x-3)}=\frac{(x-2)^{2}}{x-3}\qquad\boxed{x=2\text{ אסימפטוטה או חור}}$$

3. להוציא גורם משותף לאחר גזירה: הגעה לנגזרת **קומפקטית**.
4. בדיקת הנגזרת הקומפקטית! והמשך ניתוח במצב טבלה במחשבון (סיווג נגזרת, אסימפטוטות וחורים).
5. לא לצמצם אחרי גזירה (השארת מכנה בריבוע, מבטיחה שסימן נגזרת יושפע רק מהמונה).

נחקור את $f(x)=\frac{(x-2)^{3}}{(x-2)(x-3)}$

1. ת"ה $x<2,\quad 2<x<3,\quad x>3$. בעיקרון, תקבלנו ניקוד גם על רישום $x\neq2, x\neq3$
2. אם ניתן לצמצם, נצמצם:

$$f(x)=\frac{(x-2)^{\cancel{3}\,2}}{\cancel{(x-2)}\,(x-3)}=\frac{(x-2)^{2}}{x-3}$$

3. נגזור:

$$f'(x)=\frac{\overbrace{2(x-2)}^{u'}\cdot\overbrace{(x-3)}^{v}-\overbrace{(x-2)^2}^{u}\cdot\overbrace{1}^{v'}}{(x-3)^2}=$$

$$=\frac{(x-2)(2x-6-(x-2))}{(\sim\sim\sim\sim\ ^2)}=$$

$$=\frac{(x-2)(2x-6-x+2)}{(\sim\sim\sim\sim\ ^2)}$$

$$f'(x)=\boxed{\frac{(x-2)(x-4)}{(x-3)^2}\text{בדוקה}}$$

אותה פונקציה. גזירה ללא צמצום:

$$f'(x)=\frac{\overbrace{3(x-2)^2}^{u'}\overbrace{(x-2)(x-3)}^{v}-\overbrace{(x-2)^3}^{u}\overbrace{(2x-5)}^{v'}}{(x-2)^2(x-3)^2}$$

נוציא גורם משותף $(x-2)^3$ במונה:

$$f'(x)=\frac{(x-2)^3(3x-9-2x+5)}{(\sim\sim\sim\sim)^2}=\boxed{\frac{(x-2)^3(x-4)}{(x-2)^2(x-3)^2}}\text{בדוקה}$$

נחפש התאפסות של מונה. המכנה תמיד חיובי בת"ה.

$$f'(x)=0\Longrightarrow(x-2)^3(x-4)=0$$

$$\underset{\text{לא בת"ה}}{\cancel{x=2}}\qquad\qquad x=4\ \Downarrow\ \text{לקיצוןהד חשו}$$

טבלת סיווג (פונקציה **לא רציפה**, אז אין ברירה):

x	0	2	2.5	3	3.5	4	4.5
y'	$+$		$-$		$-$	0	$+$
y	$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$	min	$\nearrow$
		חור		אס'		$(4,4)$	

1. ת"ה כבר רשמנו.

2. אסימפטוטה $x=3$ (המכנה מתאפס והמונה אינו מתאפס)

3. אין אסימפטוטה ב- $x=2$ **גם המונה מתאפס**, לכן נבדוק מה קורה בשאיפה ל- $x=2$. בבדיקה בשיעורי x שואף ל-2 מתקבלים ערכים השואפים ל-0. הנקודה $(2,0)$ היא חור (ואינה נמצאת על הפונקציה!!!)

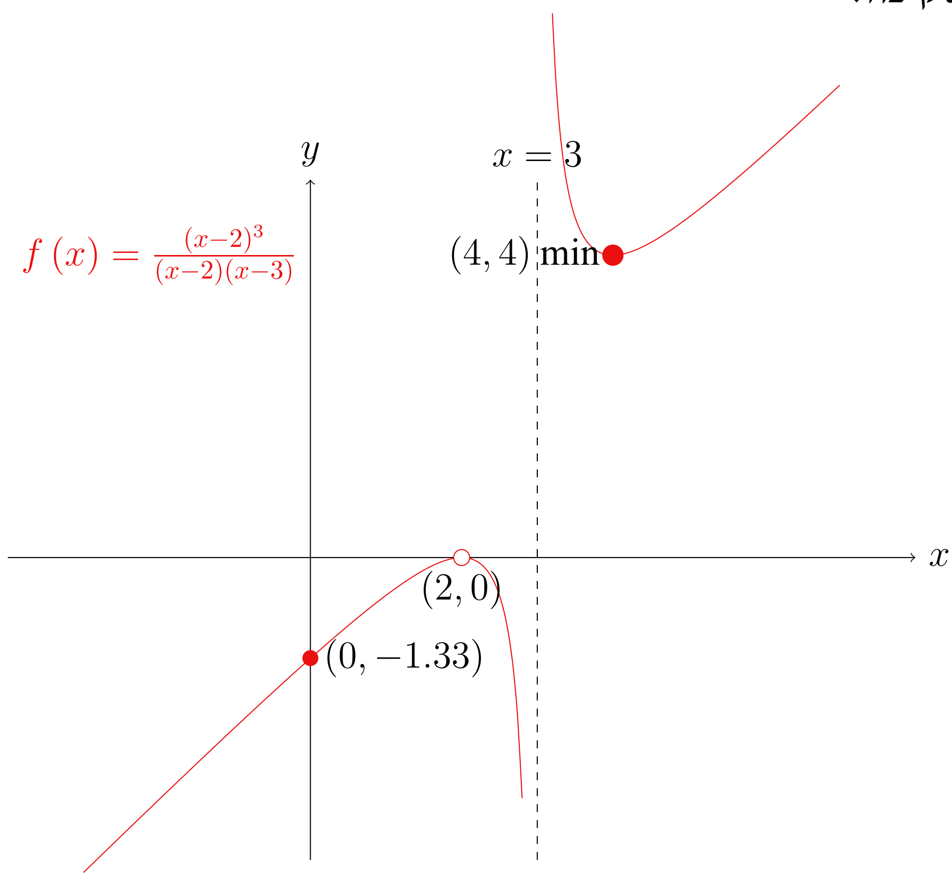
4. תחום עליה: $x<2 \vee x>4$ (שימו לב שזה ממשיך עד $\pm\infty$. זה לא נעצר ב-0 או ב-5!!!).

5. תחום ירידה - כל השאר, כלומר: $2<x<3 \ \vee \ 3<x<4$

6. נקודת מינימום $(4,4)$.

הערה: (כפי שכבר הוסבר) ניתן היה מלכתחילה לצמצם את הפונקציה בתחום ההגדרה (ולסמן חור ב-$(2,0)$). מתקבל $\frac{(x-2)^2}{(x-3)} = f\left(x\right)$ כמובן שכשיש ספק לגבי החור צריך לבדוק במחשבון סביב הנקודה החשודה.

7. סקיצה:



נחקור את 32: $y(x) = \frac{2x^2-6x-8}{(2x-3)^2}$

1. <u>ת"ה</u> $(2x-3)^3 \neq 0 \to x \neq 1.5$
2. <u>חיתוך</u> עם ציר ה-x: $y(x)=0 \Leftrightarrow 2x^2-6x-8=0 \to x_{1,2}=-1,4 \to \left(-1,0\right),\left(4,0\right)$
3. כיוון שהמונה אינו מתאפס בנקודה בה המכנה מתאפס, קיבלנו אס' <u>אנכית</u> $x=1.5$
4. חיתוך עם ציר ה-y: $y(0)=\frac{-8}{9}$

5. נק' <u>חשודות</u> לקיצון: שימו לב לצמצום ב-$(2x-3)$ שעוזר מאד בתרגיל זה להצליח בפישוט הנגזרת: הצמצום מותר מפני ש-$x \neq 1.5$ (כלומר אנו לא מחלקים ב-0).

$$y' = \frac{\overbrace{(4x-6)}^{u'}(2x-3)^{\cancel{2}\,1} - 4\overbrace{\cancel{(2x-3)}}^{v'}(2x^2-6x-8)}{(2x-3)^{\cancel{4}\,3}}$$

$y' = \frac{\cancel{8x^2}\cancel{-12x}-12x+18\cancel{-8x^2}+24x+32}{(2x-3)^3} = \frac{50}{(2x-3)^3}$ (אין נק' חשודות, אבל הנגזרת לא חיובית לכל x כי המכנה משנה סימן)

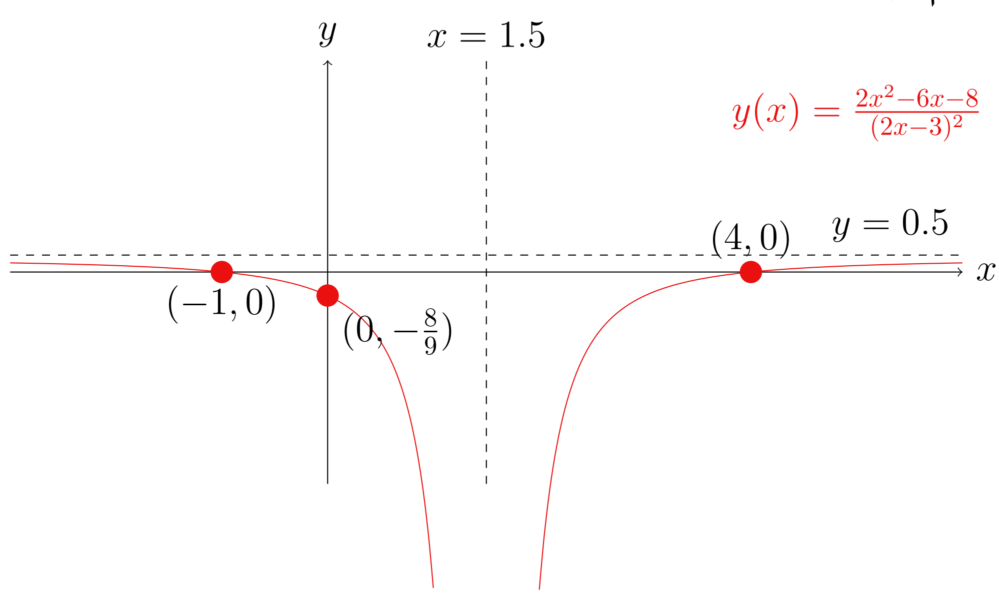
נכין טבלה:

x	0	1.5	3
y'	$-$	$\frac{xx}{xxx}$	$+$
y	↘	$\frac{xx}{xxx}$	↗
		אס'	

6. הפונקציה <u>יורדת</u> לכל $x > 1.5$ <u>ועולה</u> לכל $x < 1.5$

7. אס' <u>אופקית</u>: מעריך החזקה הגבוה ביותר מכנה שווה למעריך החזקה הגבוה ביותר במונה. לכן האסימפטוטה האופקית תיקבע לפי יחס המקדמים והיא $y = \frac{1}{2}$ (בחזקה הגבוהה יש $\frac{2x^2}{4x^2}$)

8. סקיצה:



נחקור את 33: $f(x) = \frac{x^2-4x}{x^2-4x-12}$

1. ת"ה $-2 \neq x \neq 6$.

1ב'. המונה אינו מתאפס בשיעורי x הנ"ל, ולכן <u>אסימפטוטות אנכיות</u>:

$x = -2, x = 6$

2. חיתוך עם צירים:

חיתוך עם ציר x : $y(x)=0 \Leftrightarrow \underset{\substack{\Downarrow \\ x=0}}{x}\ \underset{\substack{\Downarrow \\ x=4}}{(x-4)}=0$

$(0,0)\,,(4,0)$

$(0,0)$ הוא גם החיתוך עם ציר ה-y

3. נקודות חשודות לקיצון :

$$y'(x)=\frac{\overbrace{(2x-4)}^{u'}\overbrace{\left(x^2-4x-12\right)}^{v}-\overbrace{\left(x^2-4x\right)}^{u}\overbrace{(2x-4)}^{v'}}{\left(x^2-4x-12\right)^2}$$

$$=\frac{(2x-4)\left(\cancel{x^2}\cancel{-4x}-12\cancel{-x^2}\cancel{+4x}\right)}{\left(x^2-4x-12\right)^2}$$

$$=\frac{(2x-4)(-12)}{\left(x^2-4x-12\right)^2}$$

$$y'(x)=\frac{-24(x-2)}{\left(x^2-4x-12\right)^2}=0\ \Leftrightarrow -24(x-2)=0\rightarrow\ x=2$$

נכין טבלה, עם ערכי x $-2,2,6$ והערכים שבינהם. במחשבון תחום $start=-3,end=9,step=3$ יגע בכל הערכים הרלוונטיים.

x	-3	-2	0	2	3	6	9
y'	$+$	~~x~~	$+$	0	$-$	~~x~~	$-$
y	$\nearrow$	~~x~~	$\nearrow$	max	$\searrow$	~~x~~	$\searrow$
		אס'		$\left(2,\frac{1}{4}\right)$		אס'	

$y=1$ $y=1$

(ערך הפונקציה בנק' המקסימום התקבל במקרה קודם).

רצוי מאד לוודא נכונות נגזרת (אם כבר אתם במוד 9 או 7) :

$f'(3.2)=-0.13585$ (ניתן לבקש ב-$991ex$ גם ערך מסויים בסוף הטבלה).

כדי לוודא נציב במחשבון : $\frac{d}{dx}\blacksquare$ נקבל : $-0.13585=\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2-4x}{x^2-4x-12}\right)_{x=3.2}$, כלומר הנגזרת נכונה.

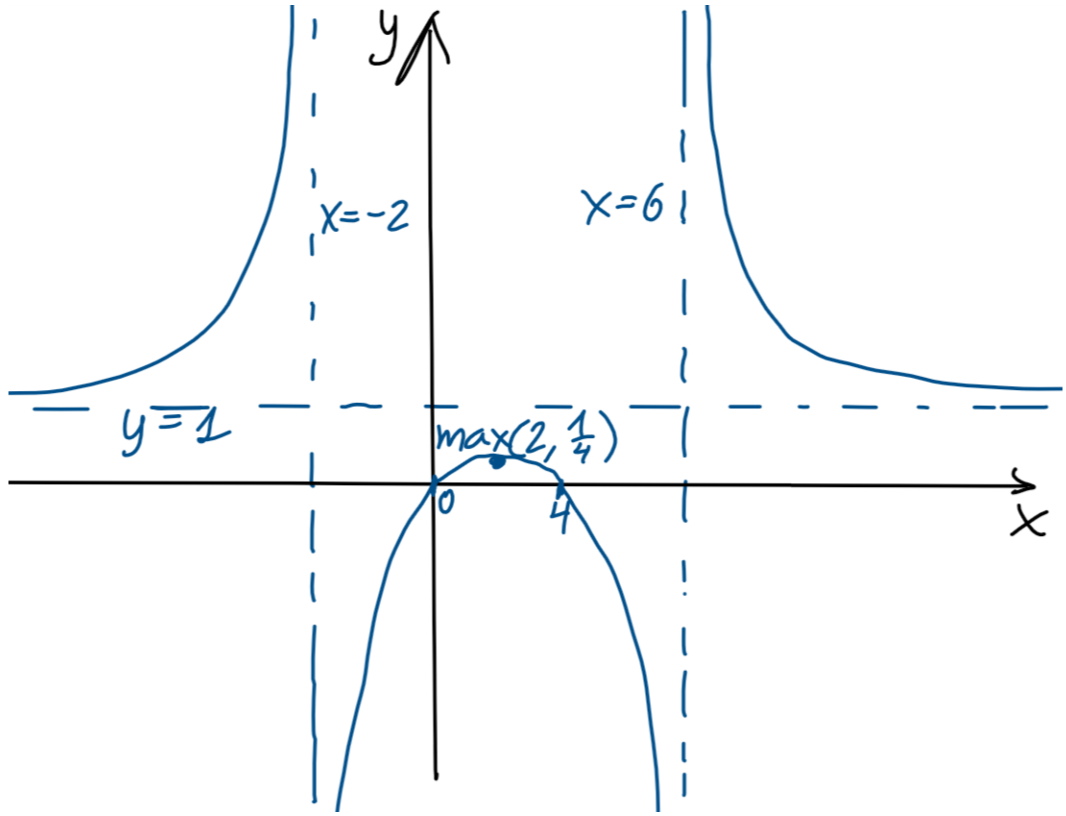
4. עלייה : $-2<x<2$ או $x<-2$,

ירידה : $x>6\quad\vee\quad 2<x<6$

5. אס' אופקית : כן מעריך החזקה הגבוהה במונה שווה למעריך החזקה הגבוהה במכנה :

במקרה כזה, מנת המקדמים קובעת כאן אסימפטוטה אופקית $y=1$.

6. סקיצה :



נחקור את 30: $f(x)=\frac{x}{x^2-6x+8}$

1. ת"ה $x^2-6x+8\neq 0 \to x\neq 4 \wedge x\neq 2$
2. המונה אינו מתאפס בערכים אלו, ולכן אסימפטוטות אנכיות:

$x=4$

$x=2$

אסימפטוטה אופקית $y=0$ (חזקת מכנה גדולה מחזקת מונה).

3. חשד לקיצון: $f'(x)=\frac{1\cdot x^2-6x+8-x(2x-6)}{(x^2-6x+8)^2}=\frac{-x^2+8}{()^2}$

$f'(x)=0\to x=\pm\sqrt{8}$

x	-3	$-\sqrt{8}$	0	2	2.1	$\sqrt{8}$	3	4	6
y'	$-$	0	$+$	$\frac{xx}{xxx}$	$+$	0	$-$	$\frac{xx}{xxx}$	$-$
y	$\searrow$	min	$\nearrow$	$\frac{xx}{xxx}$	$\nearrow$	max	$\searrow$	$\frac{xx}{xxx}$	$\searrow$
		$(-\sqrt{8},-0.086)$		אס'		$(\sqrt{8},-2.914)$		אס'	

ולאחר שירבוט על הטבלה:

פיתול

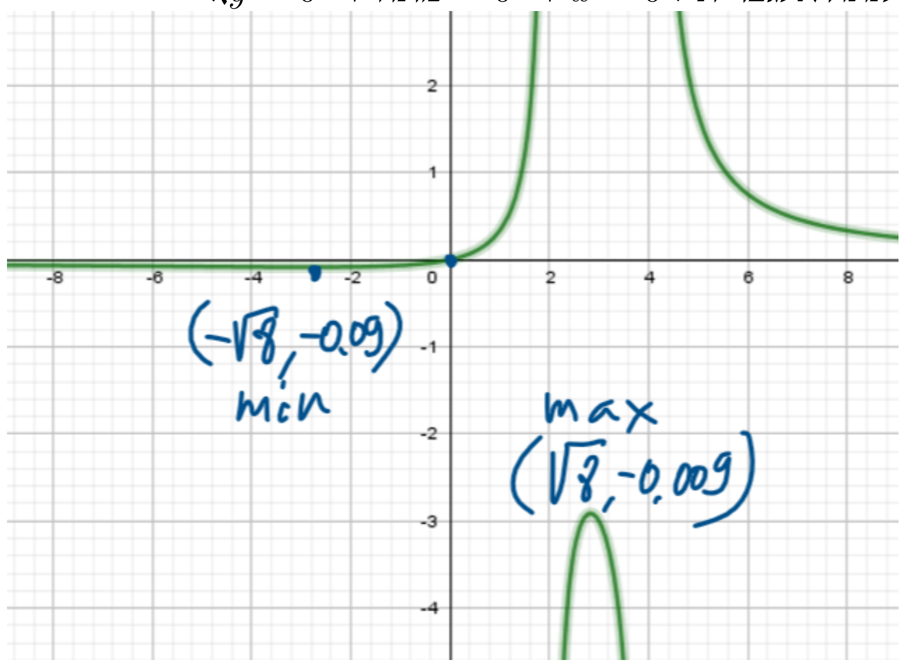
$y=0$

x	-3	$-\sqrt{8}$	0	2	2.1	$\sqrt{8}$	3	4	6
y'	$-$	0	$+$	~~xx xxx~~	$+$	0	$-$	~~xx xxx~~	$-$
y	$\searrow$	min	$\nearrow$	~~xx xxx~~	$\nearrow$	max	$\searrow$	~~xx xxx~~	$\searrow$
		$(-\sqrt{8}, -0.086)$		אס'		$(\sqrt{8}, -2.914)$		אס'	

$y=0$

מכאן כבר ברור איך תראה הסקיצה: חסר רק חיתוך עם ציר ה-y וציר ה-x:

$y(0)=0 \to (0,0)$ הוא נקודות החתוך היחידה (ניתן להסיק מהחקירה והסקיצה הראשונית שקיבלנו, או לנתח אלגברית: $x=0 \to 0=$ מונה $\to y=0$).



4. עליה: $-\sqrt{8}<x<2 \ \vee \ 2<x<\sqrt{8}$,

ירידה: $x<-\sqrt{8} \ \vee 2<x<4 \ \vee \ x>4$

5. אין דרישה למצוא את מיקום נקודת הפיתול שסומנה.

נחקור את 34:

$f\left(x\right)=\frac{x^2+3x+2}{x^2-1}=\frac{(x+1)(x+2)}{(x+1)(x-1)}$

ת"ה $x<-1\vee-1<x<1\vee x>1$

ניתן לצמצם בת"ה ולכן: $\boxed{f\left(x\right)=\frac{x+2}{x-1}}$

חיתוך צירים: $f\left(0\right)=-2\rightarrow\left(0,-2\right)$

$f\left(x\right)=0\rightarrow x+2=0\rightarrow x=-2\rightarrow\left(-2,0\right)$

אס' אנכית $x=1$ חור ב-$x=-1$ מונה ומכנה מתאפסים באותו קצב. $\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$

אס' אופקית

$$x\rightarrow\pm\infty$$

$$y=1$$

(לפי יחס מקדמים, שכן מעריך החזקה הגבוהה במונה ובמכנה זהים)

נקודות קיצון:

$f'\left(x\right)=\frac{x-1-(x+2)}{\left(x-1\right)^2}=\boxed{\frac{-3}{\left(x-1\right)^2}}<0\quad\forall x\in Dom(f)$

יורדת בכל תחום הגדרתה ואין צורך בטבלה (כן צריך לבדוק נכונות נגזרת)

נחקור את $\frac{x^2+x-6}{x^2-4x+4}$:

$f\left(x\right)=\frac{x^2+x-6}{x^2-4x+4}=\frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)^2}$ מוגדרות לכל $x\neq 2$

$f\left(x\right)=\frac{x+3}{x-2}$ לאחר צמצום. אס' אנכית $x=2$ (מכנה שואף לאפס יותר חזק מהמונה).

אס' אנכית:

$$x\to\pm\infty$$

$$y=1$$

חיתוך צירים $(-3,0)$ $(0,-1.5)$

קיצון:

בת"ה $f'\left(x\right)=\frac{x-2-(x+3)}{(x-2)^2}=\boxed{\frac{-5}{(x-2)^2}}<0\forall x$

ומכאן הדרך לסקיצה פשוטה (הודגמה בכיתה: מציירים מערכת צירים, נקודות חיתוך, נקודות "חור", אסימפטוטות, ואז ניתן לצייר פונקציה יורדת שמגיעה לאסימפטוטות ועוברת בין הנקודות השונות).

אסימפטוטות אנכיות ואופקיות

אסימפטוטות אנכיות:

אם מכנה מתאפס ומונה לא $\leftarrow$ יש אס' אנכית,

אם **שניהם מתאפסים** $\leftarrow$ צריך **לבדוק במחשבון** (טבלת ערכים 9 $menu$ אבל בעצם:

- אם החזקות שוות יהיה חור,
- ואם החזקה במכנה גדולה מזו שבמונה תהיה בכל זאת אס' אנכית
- אם החזקה במונה תהיה יותר גדולה, אז יהיה חור, אבל "בגובה" $y=0$

אסימפטוטות אופקיות:

- אם החזקה במכנה גדולה מבמונה, תהיה אסימפטוטה אופקית $y=0$
- אם החזקה במונה גדולה מזו שבמכנה - אין אסימפטוטה אופקית.

- אם החזקות שוות - האסימפטוטה האופקית תהיה לפי יחס מקדמים, לדוגמא

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{-2x^2+7x-5}{3x^2+10x}\right)=-\frac{2}{3}$$

$$\Longrightarrow\boxed{\text{אס' אופקית } \overset{x\to\pm\infty}{y}=-\frac{2}{3}}$$

מציאת פרמטרים

קדם אנליזה עמ' 161 ש4 מעל לרמת מבחן

נתונה $f\left(x\right)=\frac{x^2-kx+m}{x^2-6x+5}$ ונתון גם $\lim\limits_{x\to5}\left(f\left(x\right)\right)=1.75$ יש למצוא את הפרמטרים.

מחיפוש תחום הגדרה (פירוק המכנה לגורמים) מתקבל:

$f\left(x\right)=\frac{x^2-kx+m}{(x-1)(x-5)}$

בנוסף נתון ה- $\lim$ משמעותו חור בנקודה $(5,1.75)$ ומכאן שבהכרח המונה מתאפס ב- $x=5$. **לכן, ניתן לבטא את המונה של f באופן הבא:**

$f\left(x\right)=\frac{(x-a)(x-5)}{(x-1)(x-5)}$

(a הוא פרמטר זמני שהצבנו כדי לייצג את הפרבולה כמכפלה של שני גורמים ליניאריים).

כעת נשווה את המונה שיצרנו למונה המקורי:

$$\left(x-a\right)\left(x-5\right)=x^2-kx+m$$

$$\cancel{x^2}-ax-5x+5a=\cancel{x^2}-kx+m$$

$$\left(-a-5\right)x+5a=-kx+m$$

המקדמים של ה-x שווים זה לזה, והאיברים החופשיים שווים גם הם. לכן נובע $\boxed{-a-5=-k}$ ו- $\boxed{5a=m}$.

כל זה, לכאורה, לא מאפשר להתקדם.

כעת יש לקחת את הפונקציה שיצרנו, לצמצם ולאחר מכן ניתן להציב את הנתון לגבי החור:

$$f(x)=\frac{(x-a)\cancel{(x-5)}}{(x-1)\cancel{(x-5)}}$$

$$f(5)\overset{\text{מהנתון}}{=}1.75=\frac{5-a}{5-1}$$

$$1.75\cdot 4=5-a$$

$$a=-2$$

כעת נותר להציב במשוואות שקיבלנו:

$$k=a+5\rightarrow \boxed{k=3}$$

$$m=5a\rightarrow \boxed{m=-10}$$

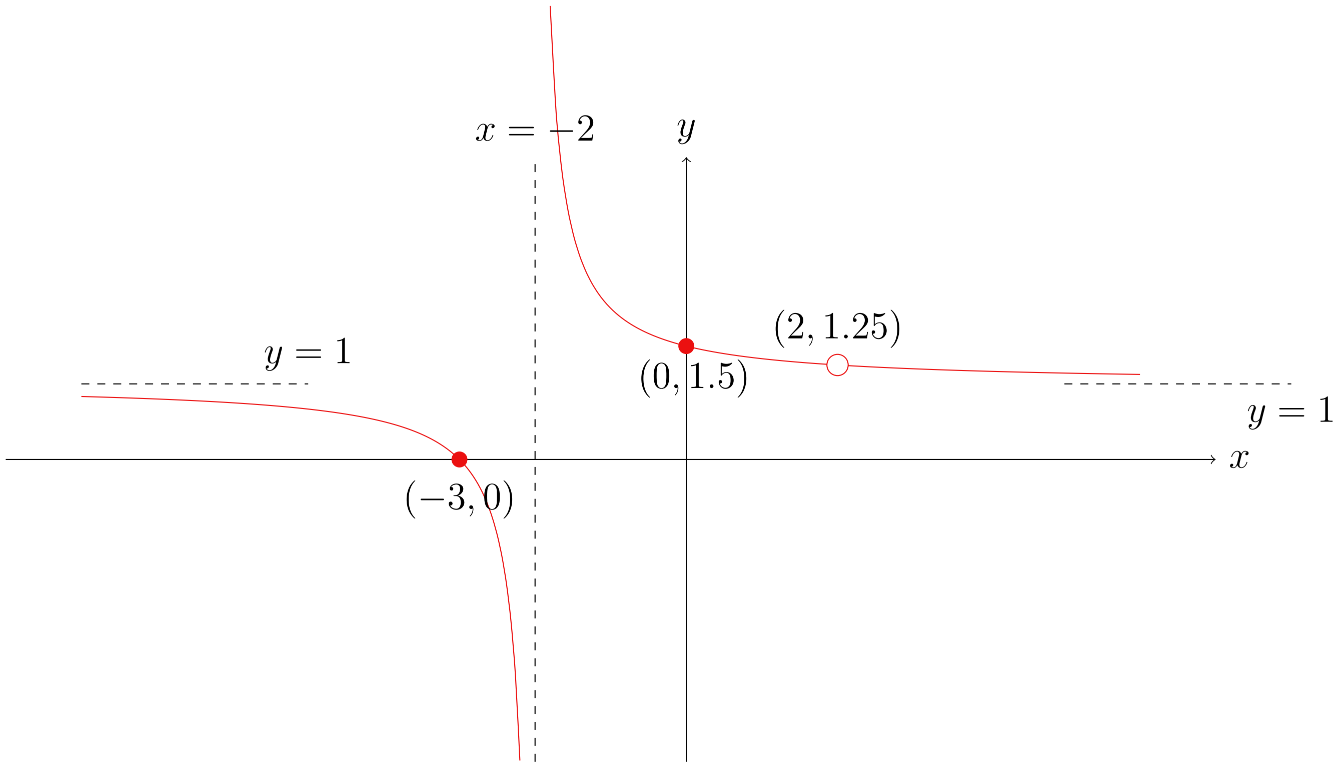
נחקור את $f\left(x\right)=\frac{x^{2}+x+a}{x^{2}+b}$

כאשר ידוע שיש לה אסימפטוטה אנכית אחת בלבד העוברת בנקודה $\left(-2,5\right)$

תהליך הפתרון (לתרגול עצמי):

1. רישום האסימפטוטה האנכית הנובעת מהנתון.
2. פירוק של המכנה והסקת ערכו של b מהאסימפטוטה האנכית הידועה.
3. הצבה של x שמצאנו שאמור לאפס גם את המונה, ומכאן פתרון של a.
4. צימצום וחישוב החור.
5. אסימפטוטות אופקיות + חיתוך צירים.
6. גזירה, פישוט הנגזרת ובדיקת נגזרת.
7. קביעה שהנגזרת חיובית/שלילית לכל X או מציאת התאפסות אם יש כזו, וחשודות לקיצון.
8. סקיצה:

- רישום האסימפטוטות,
- רישום הנקודות השונות והחורים (לא לשכוח לסמן חור בעיגול חלול).
- חיבור בין הנקודות ומשיכת הקו לכיוון האסימפטוטות אמורה לייצר סקיצה
- בדיקת התאמה בין הסקיצה למחשבון ב-$9\ menu$.



ות אופקי

נחקור את $f\left(x\right)=\frac{x^{2}-3x+a}{x^{2}+b}$

כאשר ידוע שיש לה אסימפטוטה אנכית **אחת בלבד** העוברת בנקודה $\left(-1,7\right)$

יש לפתור בתהליך דומה לזה שצויין לעי (למצוא את a ואת b ולהמשיך בחקירה).

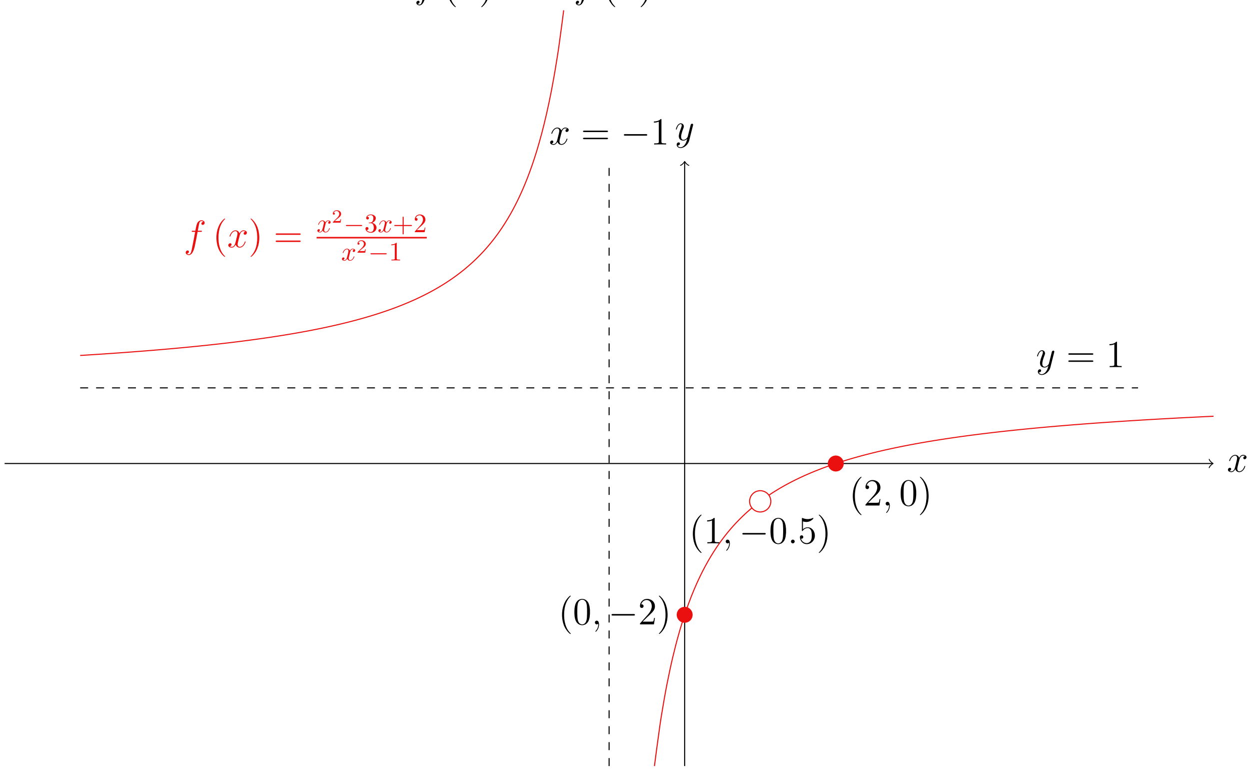
בנוסף, יש לבצע את סעיפי החשיבה הבאים :

נתונה $h\left(x\right)=\left|f\left(x-2\right)\right|$ (הזזה ימינה ואז ע"מ).

האם לפונקציה יש קיצון? אם כן, כתבו את ערכי הנקודה, מאיזה סוג היא, והסבירו כיצד מצאתם אותה.

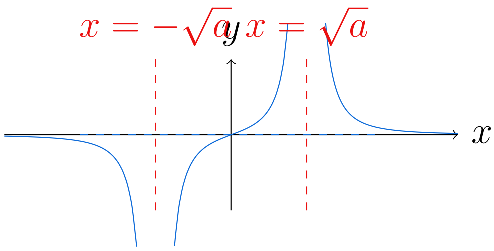
אם לא, הסבירו מדוע אין קיצון.

סעיף אחרון : ללא חישוב הסבירו כמה פתרונות יש למשוואה $f\left(x\right)=-f\left(x\right)$



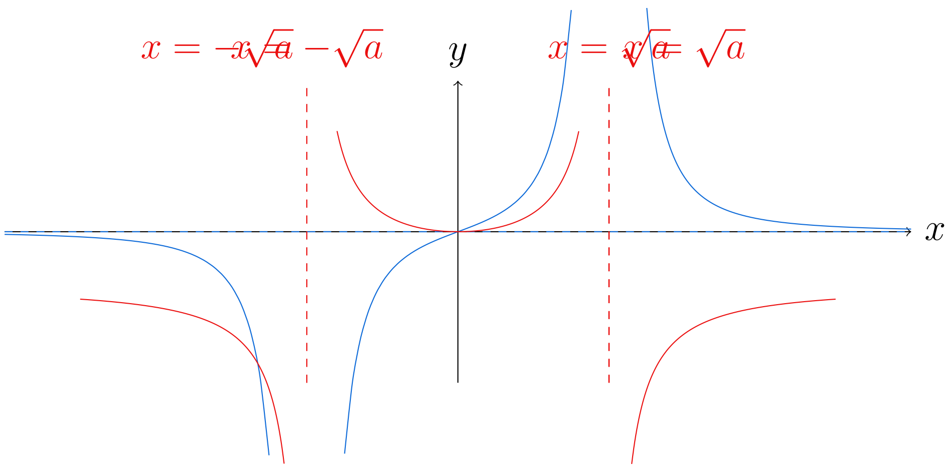
בגרות קיץ 29.5.24 + אינטגרל. להשלים.

$f\left(x\right)=\frac{6x}{\left(x^2-a\right)^2}$



$f'(x)=\frac{-6\left(x^2-a\right)\left(\overbrace{a+3x^2}^{\text{חיובי}}\right)}{\underbrace{\left(x^2-a\right)^4}_{\text{חיובי}}}$ ומכאן ניתוח סימני נגזרת לפי הפרבולה העצובה $-6\left(x^2-a\right)$ שבמונה.

$g\left(x\right)=\frac{3}{a-x^2}-\frac{3}{a}$



$f\left(x\right)=cos(x)-\left(cos(x)\right)^{0.5},\frac{-\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$