

סדרות מבגרויות 581

גיא סידס

13 במרץ 2025

תוכן העניינים

3	סדרות חשבוניות - לא במיקוד
3	בגרות 4 לא במיקוד
4	בגרות 10 לא במיקוד
5	בגרות 13 לא במיקוד
6	בגרות 18 לא במיקוד
8	בגרות 34 לא במיקוד
10	בגרות 41 לא במיקוד
12	סדרות כלליות
12	בגרות 6 עם 22
13	בגרות 23 עם 99
15	בגרות 30 עם 140
17	בגרות 33 עם 162
19	סדרות הנדסיות

20	בגרות 14 ש 2 עמ 57
21	בגרות 29 ש 2 עמ 132
23	בגרות 36 עמ 185
24	בגרות 38 עמ 200
26	בגרות 39 עמ 208
28	ש 2: בגרות 45 עמ' 266
30	בגרות 46 עמ' 278
32	מתכונת בני גורן 2023
34	בגרות 571 #23

השאלות הן מבגרויות 806 (581) הנמצאות בקישור הבא :

חוברת 581 ממוקדת תשפה - עדכון גיא

סדרות חשבוניות - לא במיקוד

בגרות 4 לא במיקוד

$$b_1 = 4a_1 \text{ נובע מהנתון}$$

$$S_{b_n} = 2S_{a_n} \text{ נתון}$$

$$S_{b_n} = \frac{n}{2} (2 \cdot 4a_1 + (n-1)d) = 2S_{a_n} = 2 \cdot \frac{n}{2} (2a_1 + (n-1)d)$$

$$4a_1 + \frac{d(n-1)}{2} = 2a_1 + d(n-1) \quad / - 2a_1 - \frac{d(n-1)}{2}$$

$$2a_1 = \frac{d(n-1)}{2} \rightarrow a_1 = \frac{d(n-1)}{4}$$

(ב)

$$2 \cdot \frac{n}{2} (2a_1 + (n-1)d) = \frac{n}{2} (2a_1 + (n-1)(d+3))$$

נכפול ב-2. את a_1 מסעיף א נציב בהמשך.

$$4a_1 + 2d(n-1) = 2a_1 + d(n-1) + 3(n-1)$$

נציב את a_1 :

$$2 \left(\frac{d(n-1)}{4} \right) + d(n-1) = +3(n-1)$$

$$1.5d(n-1) = 3(n-1)$$

$$d = 2$$

בגרות 10 לא במיקוד

נפרק לשתי הסדרות שנשמך $a_n = \langle -2, -8, \dots \rangle$, $b_n = \langle 5, 11, \dots \rangle$

$$S_{a_n} = \frac{n}{2} (2 \cdot -2 - 6(n-1))$$

$$S_{b_n} = \frac{n}{2} (2 \cdot 5 + 6(n-1))$$

$$S_{2n} = S_{a_n} + S_{b_n} \text{ ומתקיים}$$

$$S_{2n} = \frac{n}{2}(-4 + 10) = 3n$$

$$S_{2n+1} = \underbrace{S_n}_{3n} + \underbrace{\overbrace{-2}^{a_1} - 6(n+1-1)}_{a_{n+1}} = \boxed{-3n - 2}$$

(ב) בסדרה הנתונה מספר אי זוגי של איברים כלומר $2n + 1$ איברים...

$$S_{2n+1} = -3n - 2 = -65 \rightarrow \boxed{n = 21} \text{ מכאן}$$

$$(2 \cdot 21 + 1 = 43) \text{ בסהכ 43 איברים}$$

מכאן 21 זוגיים ו-22 אי זוגיים...

ידוע גם כי $a_1 = -2 \wedge d = -6$ (כך נראית סדרת האי זוגיים).

$$S_n = \frac{22}{2} (2 \cdot (-2) - 6(22-1)) = \boxed{-1430}$$

בגרות 13 לא במיקוד

כדי למצוא את a_n נחסיר את $S_n - S_{n-1}$ האיבר הלפני אחרון

$$S_n = n^2 - 5n + \left[2 + 6 + 10 + \dots + \overbrace{(4(n-1) - 2)}^{\text{האיבר האחרון}} + (4n - 2) \right]$$

$$S_{n-1} = (n-1)^2 - \underbrace{5(n-1)}_{-5n+5} + \left[2 + 6 + 10 + \dots + \overbrace{(4(n-1) - 2)}^{\text{האיבר האחרון}} \right]$$

נחסיר משוואות. הכל כמעט מצטמצם נכון?

$$n^2 - (n^2 - 2n + 1) - 5 + (4n - 2) =$$

וקיבלנו $a_n = 6n - 8$

ב) קיבלנו בא' נוסחת איבר כללי ממנה ניתן להסיק $d = 6$ (מיידית או ע"י הפרש $a_n - a_{n-1}$).
נחשב את n

$$6n - 8 < 102 \rightarrow n < 18.333 \rightarrow n = 18$$

$$a_1 = 6 \cdot 1 - 8 = -2$$

כדי לקבל סכום מירבי נרצה להתעלם מהאיברים השליליים. נשים לב כי $a_2 = 4 > 0$ (כלומר, מספיק להתעלם מ- a_1 , ונותרו 17 איברים בסדרה).

$$\frac{17}{2} (2 \cdot 4 + (17 - 1) \cdot 6) = \boxed{884} \text{ יהיה לכן הסכום יהיה}$$

בגרות 18 לא במיקוד

נתונה $a_1, a_2, \dots, a_n$ ($n > 2$)

צ"ל שסדרה $a_2^2 - a_1^2, a_3^2 - a_2^2, \dots, a_n^2 - a_{n-1}^2$ חשבונית והפרשה $2d^2$

נפריש שני עוקבים :

הערה: יש כיוון אחד שאסור בשום אופן ללכת אליו - ביטוי של a_n, a_{n-1} באמצעות

$a_1 + (n-1)d$ וכיוצא בזה. ההשלכה של מהלך כזה היא שתאלצו לחשב את:

$$(a_1 + nd - d)^2$$

כיוון שזה סיוט (יש 9 מחוברים במכפלה - כל אחד עם כל אחד), רוב התלמידים יבחרו בדרך

קלה יותר (אך שגויה), להניח ש-

$(a_1 + nd - d)^2$ שווה ל- $a_1^2 + n^2d^2 - d^2$ (או כל מיני וריאציות שגויות אחרות). זו שגיאה

אלגברית חמורה שעלולה לגרום לבוחן לנטוש את השאלה כולה, או חס וחלילה להתעצבן

בסוף השבוע.

ולכן, טכניקה א':

$$\begin{aligned} a_n^2 - a_{n-1}^2 - (a_{n-1}^2 - a_{n-2}^2) &= \\ a_n^2 - 2a_{n-1}^2 + a_{n-2}^2 &= a_n^2 - 2(a_n - d)^2 + (a_n - 2d)^2 = \\ &= a_n^2 - 2(a_n^2 - 2a_nd + d^2) + a_n^2 - 4a_nd + 4d^2 = \\ &= \cancel{a_n^2} - 2\cancel{a_n^2} + 4\cancel{a_nd} - 2d^2 + \cancel{a_n^2} - 4\cancel{a_nd} + 4d^2 = \\ &= \boxed{2d^2} \end{aligned}$$

קבוע, ולכן סדרה חשבונית כרצוי.

טכניקה ב': זיהוי כפל מקוצר: $a_n^2 - a_{n-1}^2 - (a_{n-1}^2 - a_{n-2}^2) =$

$$\begin{aligned} &= \underbrace{(a_n - a_{n-1})}_d (a_n + a_{n-1}) - \underbrace{(a_{n-1} - a_{n-2})}_d (a_{n-1} + a_{n-2}) \\ &= d \left(\underbrace{a_n + \cancel{a_{n-1}} - \cancel{a_{n-1}} - a_{n-2}}_{2d} \right) = 2d^2 \end{aligned}$$

(ב) $b_{n-1} = 64 + 2d^2(n-1-1)$ (טריקי. יש איבר אחד פחות בסדרה וצריך לשים לב

לזה). באופן כללי חשוב לאפיין ולהבין מה כמות האיברים בסדרה החדשה, בכל השאלות!!!
 ג) $64 + 2d^2(n-2) = 192$ זה לא נראה מוצלח (אבל זה דווקא כן).

אבל נחשוב רגע, אם $d^2 > 1$ אז הפרש הסדרה גדול מ-2 נניח שהפרש הסדרה הוא 2 ונחשב את כמות האיברים בסדרה החדשה (אם d גדול עוד יותר אז יש פחות איברים).

$$b_n = 192 = 64 + 2(n-1) \rightarrow n-1 = 64 \rightarrow n = 65$$

בסדרה החדשה לכל היותר 64 איברים (ולכל הפחות 2). 64 כי עבור 65 איברים מתקבל $d^2 =$
 1. אבל, מספר האיברים הוא לא תחום הערכים של n בסדרה המקורית (מה שמבקשים

בשאלה), לכן:

מהצבת $b_{n-1} = 192 = 64 + 2(n-2)$ מתקבל $n = 66$ ותחום ערכי n הוא $2 < n < 66$.
 ניתן לפתור גם באופן מלא כאי שוויון:

$$b_{n-1} = 192 = 64 + 2d^2(n-2)$$

$$d^2(n-2) = 64$$

$$1 < d^2 = \frac{64}{n-2}$$

$$n-2 < 64$$

$$2 < n < 66$$

בגרות 34 לא במיקוד

a_n היא סדרה חשבונית.

k ו- p הם מספרים טבעיים $k < p$

נתון $a_p = k, a_k = p$

א. (1) הוכח שהפרש הסדרה a_n הוא 1-.

א2) יש להביע את a_1 באמצעות k ו- p .

הוכחה:

$$a_k = a_1 + (k - 1)d = p$$

$$a_p = a_1 + (p - 1)d = k$$

נחסר משוואות ונקבל

$$(k - 1 - p + 1)d = p - k$$

$$\blacksquare d = \frac{p-k}{k-p} = -\frac{p-k}{p-k} = -1$$

א2) חישוב:

$$a_1 + (k - 1) \cdot -1 = p$$

$$a_1 + 1 - k = p$$

$$\boxed{a_1 = p + k - 1}$$

נתונים חדשים: הסדרה c_n מוגדרת כך: $c_n = a_n - n$.

נתון כי סכום 6 האיברים הראשונים בסדרה c_n הוא 0.

ב1) מצא את a_1

חישוב: ידוע כי $c_n = a_n - n$

$$c_n - c_{n-1} = \left(\underbrace{a_n - a_{n-1}}_{\text{ידוע } -1} \right) + \left(\underbrace{-n - (- (n-1))}_{\text{ידוע } -1} \right)$$

עם הפרש -2

$$c_1 = a_1 - 1 = p + k - 2$$

$$S_6 = 0 = 3(2c_1 + 5 \cdot -2) \rightarrow \boxed{c_1 = 5} = a_1 - 1 \rightarrow \boxed{a_1 = 6}$$

כאן היה ראוי להוסיף בדיקה!!!.

(ב) מהם ערכי p ו- k ? מצא את כל האפשרויות.

$$a_1 = p + k - 1 = 6 \rightarrow p + k = 7 \rightarrow k = 7 - p$$

אם נציב במשוואות מתחילת הפתרון לא נקבל שום דבר חדש.

כלומר לכאורה חסרה משוואה. כל מה שנותר הוא לפתור את $p + k = 7$ בשלמים כאשר

$$p > k$$

כלומר $p = 4, k = 3$, או $p = 5, k = 2$ או $p = 6, k = 1$. מוזר אבל כנראה נכון (עובר

בבדיקה על המשוואות).

$$(c_1 - c_2)^2, (c_3 - c_4)^2, \dots, (c_{99} - c_{100})^2$$

$$(c_1 - c_2)^2, (c_3 - c_4)^2, \dots, (c_{99} - c_{100})^2$$

כלומר יש כאן סדרה קבועה.

$$\frac{100}{2}$$

$$50 \cdot 4 = 200$$

בגרות 41 לא במיקוד

נתונה סדרה חשבונית ובה $2n + 1$ איברים. איברי הסדרה הם $a_1, a_2, \dots, a_{2n+1}$ והפרש הסדרה הוא d .

א. הוכח כי ההפרש בין סכום האיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים ובין סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים שווה לאיבר האמצעי בסדרה.

הוכחה: נשים לב כי יש $n + 1$ איברים במקומות האי זוגיים ו- n זוגיים.

האיבר האמצעי הוא $a_{(1+2n+1)/2} = a_{n+1} = a_1 + (n+1-1)d = a_1 + nd$
נחשב את S_{odd}

$$\begin{aligned} S_{odd} &= \frac{n+1}{2} (2a_1 + (n)2d) \\ &= (n+1)(a_1 + nd) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{even} &= \frac{n}{2} \left(2 \left(\overbrace{a_1 + d}^{a_2} \right) + (n-1)2d \right) \\ &= n((a_1 + d) + (n-1)d) = n(a_1 + nd) \end{aligned}$$

ההפרש הוא:

$$\begin{aligned} S_{odd} - S_{even} &= (n+1)(a_1 + nd) - n(a_1 + nd) = \\ &= (n+1-n)(a_1 + nd) = a_1 + nd = a_{n+1} \end{aligned}$$

כרצוי.

ב. נסמן ב- T את ההפרש בין סכום האיברים ב- n המקומות האחרונים ובין סכום האיברים

ב- n המקומות הראשונים. הבע את T באמצעות d ו- n .

פתרון: נביע את הסכומים:

$$S_{first} = \frac{n}{2} (2a_1 + (n-1)d)$$

מיהו האיבר הראשון בין n האחרונים?

הראשון הוא: a_{n+2} (שכן מצאנו שהאמצעי הוא a_{n+1}). מכאן ש:

$$S_{last} = \frac{n}{2} (2a_{n+2} + (n-1)d) = \frac{n}{2} (2(a_1 + (n+2-1)d) + (n-1)d) =$$

$$S_{last} = \frac{n}{2} (2(a_1 + nd + d) + (n-1)d) =$$

$$\frac{n}{2} (2a_1 + 2nd + 2d + nd - d) =$$

$$S_{last} = \frac{n}{2} (2a_1 + 3nd + d)$$

$$S_{last} - S_{first} = \frac{n}{2} (2a_1 + 3nd + d - (2a_1 + nd - d)) = \frac{n}{2} (2nd + 2d) =$$

$$T = \boxed{nd(n+1)}$$

ג. נתון: סכום כל איברי הסדרה שווה לסכום האיברים ב- $2n$ המקומות האחרונים.

סכום האיברים הראשון והאחרון הוא 204 ונתון:

$$T = 3468 = nd(n+1)$$

ג. מצא כמה איברים יש בסדרה.

$$\text{גלעד: } a_1 + a_{2n+1} = 204$$

$$a_{2n+1} = 204 \text{ ולכן } a_1 = 0, \text{ ו(גיא) מהנתון הראשון נובע כי } a_1 = 0$$

$$a_{2n+1} = 0 + (2n+1-1)d = 204 \rightarrow nd = 102$$

$$3468 = 102(n+1) \rightarrow n+1 = 34 \rightarrow n = 33 \rightarrow 2n+1 = \boxed{67}$$

סדרות כלליות

בגרות 6 עמ 22

בסדרה שכל איבריה שונים מאפס ומאחד נתון כי סכום כל שני איברים עוקבים שווה למכפלתם.

א. מצא נוסחת נסיגה (המביעה את a_{n+1} באמצעות a_n)

פתרון: נתון כי $a_{n+1} + a_n = a_{n+1} \cdot a_n$ נבודד את a_{n+1} :

$$a_{n+1}(1 - a_n) = -a_n \rightarrow a_{n+1} = -\frac{a_n}{1-a_n} \rightarrow \boxed{a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n - 1}}$$

ב. הוכח כי עבור כל n טבעי מתקיים: $a_{n+2} = a_n$.

הוכחה: נקפיץ את האינדקס ב-1 ונקבל:

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{a_{n+1} - 1}$$

נציב את a_{n+1} שמצאנו:

$$a_{n+2} = \frac{\frac{a_n}{a_n - 1}}{\frac{a_n}{a_n - 1} - 1} = \frac{\frac{a_n}{a_n - 1}}{\frac{a_n - a_n + 1}{a_n - 1}} = \frac{a_n \cancel{(a_n - 1)}}{\cancel{a_n} - 1} = a_n \quad \blacksquare$$

ג. נתון כי $a_{31} = 3$ וכי n מספר זוגי, מצא נוסחה לסכום n האיברים הראשונים.

נשים לב כי $a_1 = a_3 = \dots = a_{31} = 3$

וכמו כן $a_2 = \frac{a_1}{a_1 - 1} = \frac{3}{3-1} = 1.5$

נציב $n = 2m$ כדי לבטא את הזוגיות של n .

יש בסדרה שלנו m זוגות של איברים שסכומם 4.5 כלומר

$S_n = S_{2m} = 4.5m$ כל שנותר הוא להציב בחזרה $m = \frac{n}{2}$ ונקבל

$$S_n = 4.5 \frac{n}{2} = 2.225n$$

בגרות 23 עמ 99

נתונה סדרה חשבונית a_n המקיימת $a_4 + a_8 + a_{12} + a_{16} = 224$

א. מצא את הסכום של 19 האיברים הראשונים בסדרה a_n

$$224 = 4a_1 + (3 + 7 + 11 + 15)d = 4a_1 + 36d$$

$$56 = a_1 + 9d$$

$$S_{19} = \frac{19}{2} (2a_1 + 18d) = \frac{19}{2} \cdot 56 = \boxed{532}$$

הסדרה S_n היא סדרה הסכומים החלקיים של הסדרה $a_n : S_1, S_2, S_3, \dots$

נתון כי $S_n = n \cdot a_n$ לכל n טבעי.

ב. הראה כי הפרש הסדרה a_n הוא 0.

S_n הוא סכום סדרה חשבונית, כלומר $S_n = \frac{n}{2} (2a_1 + (n-1)d)$ $n \cdot a_n = S_n$ נחלק ב- n :

$$a_n = a_1 + \frac{(n-1)d}{2}$$

אבל ידוע כי הסדרה חשבונית, כלומר $a_n = a_1 + (n-1)d$ ומכאן

$$d = \frac{d}{2} \text{ ומתקבל } d = 0.$$

ג. מצא את a_1 :

פתרון : מהסעיף הראשון $56 = a_1 + 9d$ ומכאן ש- $a_1 = 56$ (וכך גם כל שאר האיברים).

ד. נתונה סדרה b_n המקיימת את כהלל : $b_{n+1} - b_n = a_n + S_n$

היעזר בסעיפים הקודמים ומצא את הסכום :

$$(b_2 - b_1) + (b_3 - b_2) + (b_4 - b_3) + \dots + (b_{20} - b_{19})$$

פתרון : נשים לב כי $a_n + S_n = a_n + na_n = 56 + n \cdot 56$

עבור $n = 1$ האיבר $(b_2 - b_1) = 112$, עבור $n = 2$ מתקבל $(b_3 - b_2) = 112 + 56$ ובאופן

כללי ההפרש בין זוגות האיברים הללו הוא 56. ניתן להראות את זאת (שהסדרה חשבונית)

במספר דרכים. אחת מהן היא להמיר את הביטוי $56 + n \cdot 56$ לצורה של איבר כללי של

סדרה חשבונית :

נסמן כל זוג כסדרה: c_n ונקבל: $c_n = b_{n+1} - b_n = 56 + n \cdot 56 = \underbrace{112}_{c_1} + (n-1) \cdot \underbrace{56}_{d_c}$

כעת נותר לציין כי יש בסדרה 19 זוגות (כלומר 19 איברים) ונרצה לחשב את S_{19} (של סדרת

$$S_{c_{19}} = \frac{19}{2} (2 \cdot 112 + (19-1) \cdot 56) = \boxed{11704} \quad (c_n \text{ הזוגות})$$

(הדרך הקלאסית להוכחת חשבונית היא כמובן לחשב את $c_{n+1} - c_n$).

בגרות 30 עמ 140

הסדרה a_n מוגדרת לכל n טבעי על ידי כלל הנסיגה $a_1 = -\frac{1}{c}, a_{n+1} = -\frac{c^{n-2}}{a_n}$. נתון $c > 0$.
א. הוכח כי האיברים בסדרה a_n הנמצאים במקומות האי-זוגיים מהווים סדרה הנדסית, וכי האיברים בסדרה a_n הנמצאים במקומות הזוגיים גם הם סדרה הנדסית.

הוכחה: נחשב את $a_{n+2} = -\frac{c^{n-1}}{a_{n+1}} = -\frac{c^{n-1}}{-\frac{c^{n-2}}{a_n}} = a_n \cdot c$. (וקיבלנו את מ.ש.ל. הן עבור הזוגיים, והן עבור האיזוגיים, שכן $\frac{a_{n+2}}{a_n} = c$).

ב. (1) יש לרשום את 7 האיברים הראשונים בסדרה a_n . יש להביע את התשובה באמצעות c במידת הצורך.

$$a_2 = -\frac{c^0}{-\frac{1}{c}} = 1$$

פתרון: 7 האיברים: $-\frac{1}{c}, 1, -1, c, -c, c^2, -c^2$.

(2) יש להביע באמצעות c את סכום 7 האיברים הראשונים בסדרה a_n .

$$S_7 = -\frac{1}{c}$$

(3) יש להוכיח כי לכל n טבעי, הסכום של $2n - 1$ האיברים הראשונים בסדרה a_n אינו תלוי ב- n .

פתרון: עבור $n = 1$ הסכום הוא $S_1 = a_1 = -\frac{1}{c}$. עבור כל $n > 1$ מתקבל ש- $a_{2n-1} = -a_{2n-2}$. זאת משום ש- $a_3 = -a_2$ ומנת הסדרות במקומות הזוגיים ובמקומות האי-זוגיים זהה.

ג. הסדרה b_n מוגדרת באופן הבא: $b_n = -\frac{2}{a_n \cdot a_{n+1}}$.

(1) יש להראות כי b_n היא סדרה הנדסית.

$$b_n = -\frac{2}{a_n \cdot a_{n+1}} = -\frac{2}{-c^{n-2}} = 2 \left(\frac{1}{c}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{1}{c}\right)^{n-1} = 2c \left(\frac{1}{c}\right)^{n-1}$$

כללי של סדרה הנדסית, ולכן הסדרה הנדסית. (ניתן להראות זאת גם ע"י חלוקת b_{n+1} ב- b_n).

(2) מהו תחום הערכים של c שבעבורם b_n היא סדרה יורדת?

פתרון: כאשר $c > 1$ המנה תהיה קטנה מ-1, והסדרה תהיה יורדת.

3) נתון כשהסדרה האין-סופית b_n היא סדרה יורדת. יש להביע באמצעות c את סכומה.

$$S_{b_n} = \frac{b_1}{1-q_b} = \frac{2c}{1-\frac{1}{c}} = \frac{2c}{\frac{c-1}{c}} = \boxed{\frac{2c^2}{c-1}}$$

בגרות 33 עמ 162

נתונה סדרה a_n המקיימת לכל n את הכלל: $a_{n+1} + a_n = 6n + 5$.
א. הוכח כי מתקיים $a_{n+2} = a_n + c$ (הוא מספר קבוע), ומצא את c .

פתרון: נחשב את a_{n+2} :

$$a_{n+1} = -a_n + 6n + 5$$

$$a_{n+2} + a_{n+1} = 6(n+1) + 5 \quad (\text{הקפצת אינדקס})$$

ומהצבת a_{n+1} נקבל:

$$a_{n+2} - a_n + 6n + 5 = 6(n+1) + 5$$

$$a_{n+2} = a_n + 6 \quad \boxed{c=6} \text{ וקיבלנו כרצוי.}$$

ב. כתוב דוגמא לסדרה a_n המקיימת את הכלל, והיא אינה סדרה חשבונית (כתוב לפחות 4 איברים ראשונים בסדרה).

ננסה להציב, $a_1 = 1$ ולחשב:

$$a_{n+1} = -a_n + 6n + 5$$

$$a_2 = -a_1 + 6 \cdot 2 + 5 = 16$$

$$a_3 = -a_2 + 6 \cdot 3 + 5 = 7$$

$$a_4 = -a_3 + 6 \cdot 4 + 5 = 22$$

וקיבלנו דוגמא לסדרה שאינה חשבונית.

נתון כי הסדרה a_n כולה היא חשבונית.

ג. חשב את a_1

$$a_n + d =^* a_{n+1} =^{**} -a_n + 6n + 5$$

* מהגדרת סדרה חשבונית.

** נתון.

$$2a_n = 6n + 5 - d \rightarrow a_n = 2.5 + 3n - \frac{d}{2}$$

לסדרה חשבונית זו $d = 3$ ולכן $a_1 = 2.5 + 3 - 1.5 = 4$

הערה: ניתן היה להסיק מהנתון ישירות כי $d = 3$ מפני שכבר קיבלנו את שההפרש בין a_{n+2} ל- a_n הוא 6... (רק צריך לחשוב...היו עריך לכך שבלחץ זמן חושבים פחות ונחפזים יותר...) נרשום את האיבר הכללי לפי נוסחת איבר כללי של סדרה חשבונית:

$$a_n = 4 + (n - 1) \cdot 3$$

בנו סדרה חדשה בת $2n + 1$ איברים:

$$a_1 - 1, a_2 - 2, \dots, a_{2n+1} - (2n + 1)$$

ד. חשב את סכום הסדרה החדשה.

בסדרה החדשה מתקיים $a_n = 1 + 3n - n = 1 + 2n$ הוא השינוי ביחס לסדרה המקורית)

$$d = 2, a_1 = 3$$

$$a_n = 3 + 2(n - 1)$$

$$a_{n+1} = 43 = 3 + (n + 1 - 1) \cdot 2$$

$$n = \frac{43-3}{2} = 20$$

$S_{2n+1} = (2n + 1) \cdot 43 = 41 \cdot 43 = 1763$ (סכום סדרה ככמות האיברים כפול האיבר הממוצע. איבר זה שווה לאיבר האמצעי כאשר הוא קיים).

סדרות הנדסיות

כלל נסיגה :

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = a_n \cdot q \end{cases}$$

איבר כללי :

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

סכום :

$$S_n = \frac{a_1 (q^n - 1)}{q - 1}$$

סכום סדרה אינסופית מתכנסת $0 < q < 1$, $-1 < q < 0$:

$$S = \frac{a_1}{1 - q}$$

בגרות 14 ש 2 עמ 57

נתונה סדרה ובה $S_1 = 3$, $S_{n+1} = bS_n + 3$ לכל $n \geq 1$.
הוכחת סדרה הנדסית:

$$\begin{aligned}
 \textcircled{1} \quad & S_{n+1} = bS_n + 3 \\
 \textcircled{2} \quad & S_n = bS_{n-1} + 3, \quad n \geq 2 \\
 \textcircled{1} - \textcircled{2} \quad & \underbrace{S_{n+1} - S_n}_{a_{n+1}} = bS_n + 3 - (bS_{n-1} + 3) \\
 & a_{n+1} = b \left(\underbrace{S_n - S_{n-1}}_{a_n} \right) / \div a_n \\
 & \frac{a_{n+1}}{a_n} = b \quad \text{קבוע כרצוי}
 \end{aligned}$$

נותר מקרה קצה שכן $\frac{a_2}{a_1}$ לא בתחום ההגדרה של מערכת המשוואות עימה עבדנו:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_2}{s_1} = \frac{\overset{bs_1+3}{\tilde{s}_2} - \overset{3}{\tilde{s}_1}}{3} = \frac{b \cdot 3}{3} = b \quad \text{כרצוי}$$

בגרות 29 ש 2 עמ 132

$$\boxed{S = \frac{a_1}{1-q}} : \text{הנוסחה לסכום אינסופי}$$

$$\text{סכום סדרה אינסופית } T = \frac{a_1}{1-q^2} \text{ אי-זוגיים}$$

$$\text{סכום אינסופי } R = \frac{a_2}{1-q^2} = \frac{a_1 q}{1-q^2} \text{ זוגיים}$$

נתון

$$T + p \cdot R = 0$$

$$\rightarrow p = -\frac{T}{R} = \frac{\frac{-a_1}{1-q^2}}{\frac{a_1 q}{1-q^2}} = \frac{-a_1}{1-q^2} \cdot \frac{1-q^2}{a_1 q} = \boxed{\frac{-1}{q}}$$

ג. q של מתכנסת (נתון סדרה מקורית מתכנסת) הוא בהכרח $-1 < q < 1$ ולכן המנה של

הסדרה b_n היא בהכרח $q_b > 1 \vee q_b < -1$ ומכאן הסדרה b_n אינה מתכנסת.

ד. נתון p שלילי, להראות שמתקיים $a_{n+1} > a_n$. אם $p < 0$ מתחייב $q > 0$ וידוע גם $q < 1$

אז $0 < q < 1$ ומכאן שבהכרח $a_1 < 0$ כדי לקבל סכום שלילי. (זו הסדרה התחתונה מבין

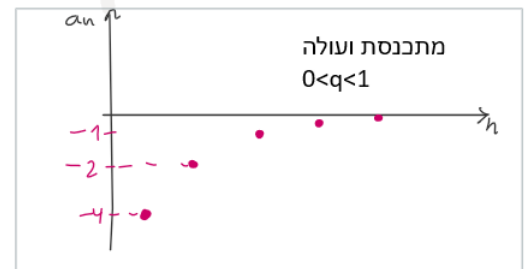
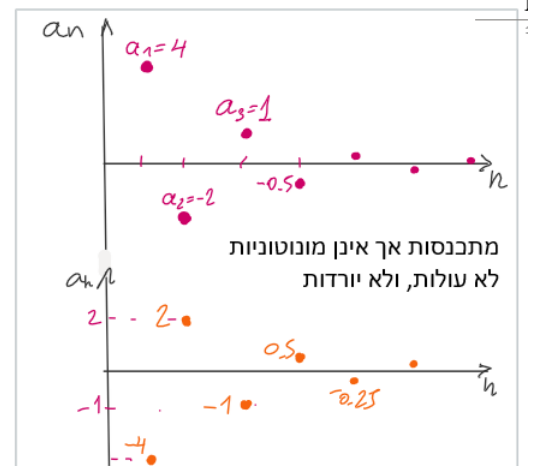
4 האיורים, אחרת כל האיברים יהיו חיוביים ולא יתקבל סכום שלילי...). ומכאן גם נובע

שהסדרה עולה: ידוע ש $a_{n+1} = a_n q$ וצ"ל $a_{n+1} > a_n$ כלומר להוכיח $a_n q > a_n$ כלומר

$a_n (q - 1) > 0$ לכן צריך להוכיח שגם a_n שלילי לכל n . כבר קיבלנו ש $a_1 < 0$ וכיוון ש- q שלילי

חיובי, אז גם כל יתר האיברים שליליים, כרצוי. טיפה מכווער. יותר טוב לשכנע שבשלב זה,

רק הסקיצה האדומה התחתונה נכונה.



בגרות 36 עמ 185

בסדרה a_n נתון כי לכל n טבעי, סכום n האיברים הראשונים של הסדרה הוא $S_n = 2 \cdot 3^n - 2$.

א(1) יש למצוא את a_1 ואת האיבר הכללי של הסדרה a_n בעבור $n > 1$. ויש להראות שהסדרה היא הנדסית.

$$\text{פתרון: } S_{n-1} = 2 \cdot 3^{n-1} - 2$$

$$a_n = S_n - S_{n-1} = 1 \frac{1}{3} \cdot 3^n$$

מכאן ש- $q = 3, a_1 = 4$ (מהצבה). (לגבי q רואים שבכל פעם כופלים ב-3. ניתן לחשב גם

$$\text{את המנה באופן מפורש ע"י הצבת } \frac{a_{n+1}}{a_n})$$

$$\text{ב(1) נתונה } c_n = S_{n+1} - S_n \text{ (כלומר } c_n = a_{n+1}).$$

a_n הנדסית לכן בהכרח גם c_n (זו תת סדרה של a_n - לא כולל האיבר הראשון).

ב(2) יש להראות כי לכל k טבעי, סכום k האיברים הראשונים בסדרה c_n גדול פי 3 מן הסכום של k האיברים הראשונים בסדרה a_n .

פתרון: כיוון ש- $q = 3$ בשתי הסדרות וראינו $c_n = a_{n+1}$ כלומר $c_n = 3a_n$ יוצא של איבר בסדרה c_n גדול פי 3 מהאיבר המקביל לו בסדרה a_n ומכאן שגם הסכום כולו יהיה גדול פי 3.

הסבר מילולי כאן עדיף על אלגברה - הוא גם מוכיח שזה קורה, וגם מסביר מדוע.

בגרות 38 עמ 200

סכום כל איברי סדרה מתכנסת בלי הראשון הוא 4, וסכום כל איברי הסדרה כאשר הופכים את סימני המקומות הזוגיים, שוב ללא הראשון, הוא -2.4 . יש למצוא את האיבר הראשון והמנה.

נחלק את הסכומים זה בזה (רישום ככפל בהופכי):

$$\frac{\cancel{a_1}q}{1-q} \cdot \frac{1-(-q)}{\cancel{a_1}(-q)} = \frac{4}{-2.4}$$

$$\frac{1+q}{1-q} = \frac{4}{2.4} = \frac{5}{3}$$

$$3 + 3q = 5 - 5q$$

$$8q = 2$$

$$q = \boxed{\frac{1}{4}} \Rightarrow \frac{a_1 \cdot 0.25}{0.75} = 4$$

$$\boxed{a_1 = 12}$$

יש להוכיח כי הסדרה $c_n = \frac{a_{n+1}}{a_n^2}$ הנדסית. נחשב את האיבר c_n תחילה:

$$c_n = \frac{a_{n+1}}{a_n^2} = \frac{\cancel{a_n}q}{\cancel{a_n}^2} = \frac{q}{a_n}$$

וכעת את המנה :

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{\frac{q}{a_{n+1}}}{\frac{q}{a_n}} = \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{q} \text{ קבוע ולכן הנדסית}$$

$$c_1 = \frac{q}{a_1} = \frac{0.25}{12} = \boxed{\frac{1}{48}}$$

$$q_c = \frac{1}{0.25} = \boxed{4}$$

ג. נתון כי הסכום $c_{k+1} + c_{k+2} + \dots + c_{3k}$ גדול פי 4096 מסכום $2k$ האיברים הראשונים בסדרה c_n . יש למצוא את k .

$$\begin{aligned} 4096 \cdot S_{C_{2k}} &= 4096 \frac{c_1 (4^{2k} - 1)}{4 - 1} = S_{c_{2k_last}} = \frac{c_{k+1} (4^{2k} - 1)}{4 - 1} \\ &= 4096 \frac{c_1 (4^{2k} - 1)}{4 - 1} = \frac{c_1 4^k (4^{2k} - 1)}{4 - 1} \\ 4096 &= 4^k \end{aligned}$$

$$\log_{\boxed{4}} \boxed{4096} = \boxed{k = 6}$$

בגרות 39 עמ 208

הסדרה a_n היא סדרה המקיימת לכל n טבעי את הכלל: $3a_{n+2} + 5a_{n+1} - 2a_n = 0$

א. מצא את שני הערכים האפשריים למנת הסדרה.

פתרון: חלוקה של $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ אינה מובילה לשום פתרון (כלומר כלל הנסיגה לא בהכרח מייצג סדרה הנדסית). אבל לא לכך כיוון מחבר השאלה.

נניח כי קיימת סדרה הנדסית המקיימת את הכלל, אז קיים q שהוא מנת הסדרה. נציב אותו:

$$3a_n q^2 + 5a_n q - 2a_n = 0 \quad / \div a_n$$

$3q^2 + 5q - 2 = 0 \rightarrow q_{1,2} = -2, \frac{1}{3}$ (קיימות אינסוף סדרות, עם המנות האלו (תלוי

ב- a_1 שנבחר), אבל כפי שהודגם קיימות גם אינסוף סדרות המקיימות את כלל הנסיגה שאינן

הנדסיות ואין להן מנה -2 או $\frac{1}{3}$, כמו למשל הסדרה:

n	1	2	3	4	5
a_n	1	3	-4.333	9.2222	-18.2593

לכן השאלה לא לגמרי תקינה. על כל פנים את סעיף ב' יש להבין כאילו מכוונים לשתי האפשרויות לסדרות הנדסיות שקיבלנו:

”נסמן את איברי של הסדרה המקיימת את הכלל ולא מתכנסת ב- $b_1, b_2, b_3, \dots$.

נסן את איברי של הסדרה המקיימת את הכלל ומתכנסת $c_1, c_2, c_3, \dots$.

ב. הסבר מדור הסדרה $b_1 c_1, b_2 c_2, \dots$ היא סדרה הנדסית מתכנסת.

נחשב את המנה. ידוע כי $q_b = -2$ (מפני שאינה מתכנסת, ושצריך להניח שלא תיתכן הסדרה שהודגמה לעיל שאינה הנדסית):

$$\text{וידוע כי } q_c = \frac{1}{3} \text{ (מתכנסת).}$$

$$\text{המנה היא: } \frac{b_{n+1} c_{n+1}}{b_n c_n} = -2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{-2}{3}$$

$$0 < \left| -\frac{2}{3} \right| < 1 \text{ ולכן הסדרה מתכנסת.}$$

נתון כי סכום הסדרה (האינסופית $b_n c_n$) הוא 15, וכי $b_1 = c_1 = m$.

ג. מצא את m .

$$S_n = \frac{m^2}{1 - \frac{2}{3}} = 15 \rightarrow m^2 = 25 \rightarrow \boxed{m = \pm 5}$$

ד. נתון $b_1 + b_2 + \dots + b_k = 1705$ ונתון $m = -5$, מצא את k

$$S_k = -5 \frac{-2^k - 1}{-2 - 1} = 1705$$

$$-2^k - 1 = \frac{1705 \cdot 3}{5} = 1023$$

$-2^k = 1024 \rightarrow k = 10$. (מידע של חזקות של 2). הערה לצורך חישוב לוגריתמי חייבים

לקחת כבסיס את $+2$ (הלוג לא מוגדר על בסיס שלילי).

ש: 2 בגרות 45 עמ' 266

סדרה I היא סדרה הנדסית אין-סופית שאיבריה הם $a_1, a_2, \dots$ ומנתה היא $9 \cdot r^2$. נתון $0 < r < \frac{1}{3}$

בין כל שני איברים בסדרה I הכניסו איבר נוסף, ונוצרה סדרה הנדסית חדשה יורדת, סדרה II שאיבריה $b_1, b_2, \dots$ ומנתה q
א. (1) הביעו את q באמצעות r :

פתרון: $q = \pm\sqrt{9r^2} = \pm 3r$ אבל השלילי נפסל כי אז הסדרה מזגזגת ולא יורדת...
(2) הסבירו מדוע שתי הסדרות מתכנסות:

פתרון: הסדרה הראשונה מתכנסת כי הביטוי $9 \cdot r^2$ עבור $0 < r < \frac{1}{3}$ קטן מ-1 וגדול מ-0, ועומד בתנאי לסדרה מתכנסת ($-1 < q < 1$ ו- $q \neq 0$)

שורש של מספר קטן מ-1 נותר קטן מ-1 ולכן גם הסדרה b_n מתכנסת (גם מנתה בין 0 ל-1).
נתון גם כי סכום סדרה II גדול פי $\frac{4}{3}$ מסכום I .

(ב) יש לחשב את q

$$\frac{a_1}{1-q^2} = \frac{3}{4} \cdot \underbrace{\frac{a_1}{1-q}}_{\text{סכום סדרה 2}}$$

$$4(1-q) = 3(1-q)(1+q)$$

$$4 = 3 + 3q$$

$$\text{סדרה } II \quad q = \frac{1}{3}$$

נתון כי סכום האיברים במקומות הזוגיים בסדרה II הוא 12.

$$\frac{\widehat{b_1 q}}{1-q^2} = \frac{b_1 \frac{1}{3}}{1-\frac{1}{9}} = \frac{3}{8} b_1 \stackrel{\text{נתון}}{=} 12$$

$$\rightarrow b_1 = 32,$$

ג. מצאו את סכום כל האיברים של סדרה II במקומות שמתחלקים ב-5 ($b_5, b_{10}, b_{15}, \dots$)

פתרון: $b_5 = 32 \cdot \frac{1}{3^4} = \frac{32}{81}$ מנת הסדרה החדשה $\cdot \frac{1}{3^5}$.

וסכום הסדרה האינסופית: $\frac{\frac{32}{81}}{1 - \frac{1}{3^5}} = \frac{48}{121}$

ד. מיצאו את היחס בסדרה II בין האיבר החמישי לבין סכום כל האיברים שאחרי איבר זה.

$$b_6 = \frac{32}{243}$$

$$\frac{\frac{32}{243}}{1 - \frac{1}{3}} = 2 \quad \text{פתרון:}$$

ה. הוכיחו כי בכל סדרה הנדסית

$$\frac{a_{n-1}}{\frac{a_n}{1-q}} = \frac{\frac{a_n}{q}}{\frac{a_n}{1-q}} = \frac{a_n}{\frac{a_n \cdot q}{1-q}} = \frac{1-q}{q}$$

בגרות 46 עמ' 278

נתונה סדרה הנדסית אין-סופית A שהאיבר הכללי שלה הוא a_n ומנתה היא q.

$$a_1 a_{2n} = a_n a_{n+1} \quad \text{צ"ל}$$

לא רוצה שתתרגלו לעבוד עם $a_n = a_1 q^{n-1}$ מעדיף כשאפשר להשתמש ב- $a_{n+1} = a_n \cdot q$ אבל כאן לא רואה ברירה אחרת

$$LHS = a_1 a_{2n} = \boxed{a_1 \cdot a_1 q^{2n-1}} \stackrel{?}{=} RHS : a_n a_{n+1} = a_1 q^{n-1} a_1 q^n = \boxed{a_1^2 q^{2n-1}}$$

(ב) מכפלת שני האמצעיים בסדרה באורך $2k$ היא $10935 a_1$

שני האמצעים הם $a_k a_{k+1}$ וידוע $a_k a_{k+1} = a_1 a_{2k}$ ומכאן :

$$\cancel{a_1} a_{2k} = 10935 \cancel{a_1}$$

$$a_1 q^{2k-1} = 10935 \quad \text{ידוע גם כי}$$

$$a_{2k-2} = a_1 q^{2k-3} = 1215$$

מחלוקת שתי המשוואות נקבל :

$$q^2 = \frac{10935}{1215} \rightarrow q = \pm \sqrt{\frac{10935}{1215}} = \pm 3 \quad \text{למצוא 2 אפשרויות.}$$

$$(ג) \text{ נתון גם } a_1 = 5.$$

(1) האם עולה יורדת או לא זה ולא זה. מהנתון נגלה שאחד ה- q נפסל.

$$\text{נציב את } a_1 = 5, \text{ כאן, } \underset{a_1}{5} q^{2k-1} = 10935 \text{ ונראה מה עובד: } \boxed{3}^{2k-1} = 10935 \cdot 5 \text{ עובד?}$$

חייב לפתור את המשוואה המעריכית הזו :

$$\boxed{3^{2k-1} = 2187}$$

$$2k - 1 = \log_{\boxed{3}} 2187 = \boxed{7}$$

ויוצא $2k = 8$ כלומר $\boxed{k = 4}$ אבל לא זה הסיפור...

הסיפור הגדול זה ש- $2k - 1 = 7$ כי מה יקרה אם היינו פותרים אותו דבר על $q = -3$?

קודם כל לא ניתן לחשב $\log$ עם בסיס שלילי כי זה לא מוגדר.

אז מניחים את התוצאה החיובית של הלוג וניתן להפעיל את החזקה כדי לקבל 2187 (אבל יתקבל בערך שלילי):

$$(-3)^7 = -2187 \text{ ולכן } q = -3 \text{ נפסל.}$$

לוג: אם יש משוואה מהסוג $y = a^x$ אז $x = \log_a y$ הוא הבסיס ו- y הוא הארגומנט. (למשל $1000 = 10^x$ יודעים לפתור בראש, אבל $3^x = 2187$ לא יודעים לפתור)

לסיכום $q = 3 > 0$ והסדרה עולה שכן $a_1 > 0$

ד. סדרה אינסופית $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_n}$ וצ"ל הנדסית:

צ"ל שהמנה קבועה:

$$\frac{\frac{1}{a_{n+1}}}{\frac{1}{a_n}} = \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\overset{1}{a_n}}{\cancel{a_n} q} = \frac{1}{q} = \text{קבוע} \blacksquare$$

ה. הופכים סימנים:

נחשב את סכום הסדרה השלילית - במקומות האי-זוגיים, ובנפרד את

המקומות הזוגיים:

המנה $\frac{a_{n+2}}{a_n} = \frac{1}{q^2} = \frac{1}{9}$ (וזה המנה של סדרת המקומות האי-זוגיים, אך גם של סדרת המקומות הזוגיים).

$$c_1 = -0.2 \rightarrow S_{c_{odd}} = \frac{-0.2}{1 - \frac{1}{9}}$$

$$a_2 = 5 \cdot 3 \rightarrow c_2 = \frac{1}{15} \rightarrow S_{c_{even}} = \frac{\frac{1}{15}}{1 - \frac{1}{9}}$$

והסכום של שני הסכומים הוא סכום הסדרה c .

$$\cdot \frac{1/15 - 0.2}{1 - \frac{1}{9}} = \boxed{-0.15}$$

מתכונת בני גורן 2023

נתונות שתי סדרות המקיימות את התנאים הבאים לכל n טבעי :

$$b_n = a_n \cdot a_{n+1}, \quad a_{n+1} = a_n + k \text{ טבעי.}$$

א. הוכיחו כי בסדרה a_n האיברים העומדים במקומות הזוגיים, וגם האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים מהווים סדרה חשבונית.

הוכחה : אם נוכיח הפרש קבוע $a_{n+2} - a_n$ אז סדרה הזוגיים, כמו גם האי-זוגיים, חשבונית. נתון $a_{n+1} = a_n + k$ ומכאן שהסדרה חשבונית (הפרש קבוע). מתקיים עבור הזוגיים ועבור האי-זוגיים $a_{n+2} = a_{n+1} + k = a_n + 2k$, ולכן 2 סדרות אלו חשבוניות והפרשן $2k$.

ב. הוכיחו כי $b_{n+1} - b_n = 2k \cdot a_{n+1}$ לכל n טבעי.

הוכחה : מהנתון נובע $b_{n+1} = a_{n+1} \cdot a_{n+2}$ ומכאן :

$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n &= a_{n+1} \cdot a_{n+2} - a_n \cdot a_{n+1} = \\ &= a_{n+1} \left(\underbrace{a_{n+2} - a_n}_{2k} \right) = 2ka_{n+1} \text{ כרצוי} \end{aligned}$$

ג. הסדרה c_n **מוגדרת לכל** n **טבעי על ידי** $c_n = b_{n+1} - b_n$

(1) הוכחה כי c_n **חשבונית :**

מהנתון ומסעיף קודם נובע כי $c_n = 2ka_{n+1}$. זהו כפל בקבוע של סדרה חשבונית ולכן תתקבל סדרה חשבונית. נוכיח למקרה הנתון :

$$\begin{aligned} c_{n+1} - c_n &= 2ka_{n+2} - 2ka_{n+1} = 2k \left(\underbrace{a_{n+2} - a_{n+1}}_{\text{נתון במבוא } = k} \right) = 2k^2 \\ &\text{חשבונית כרצוי, והפרשה } 2k^2. \end{aligned}$$

ג(2) $a_1 = 1 \rightarrow a_2 = 1 + k$

$$c_1 \stackrel{\text{מסעיף 1ג}}{=} 2ka_2 = \boxed{2k(k+1)}$$

ג(3) נתון $c_1^2 - c_2^2 + c_3^2 - c_4^2 + \dots + c_{19}^2 - c_{20}^2 = -80(42k^2 + 4k)$ יש למצוא את k .

$$\left(\underbrace{c_1 - c_2}_{-d} \right) (c_1 + c_2) + \left(\underbrace{c_3 - c_4}_{=-d=-2k^2} \right) (c_3 + c_4) + \dots$$

ומכאן שנתון כי :

$$-2k^2 \cdot S_{c_{20}} = -80(42k^2 + 4k)$$

$$2k \frac{20}{2} (2 \cdot 2k(k+1) + (20-1)2k^2) = 80(42k+4) / \div 40$$

$$2k(2k^2 + 2k + 19 \cdot k^2) = 4(42k + 4)$$

$$2k^2(21k+2) = 8(21k+2)$$

$$k = \pm 2 \rightarrow \boxed{k = 2}$$

בגרות 571 #23

א. אינדקס האמצעי הוא ממוצע האינדקסים: $\frac{1+2n+1}{2} = n+1$ ולכן

$$\begin{aligned} 256S_n &= S_{n \text{ אחרונים}} \\ \frac{256a_1 (q^n - 1)}{q - 1} &= \frac{a_{n+2} (q^n - 1)}{q - 1} \\ 256a_1 &= q^{n+1} \end{aligned}$$

ומהנתון הראשון:

$$\begin{aligned} S_{2n} &= 4S_{2n-2} \\ \text{ללא שני ראשונים} \\ \frac{a_3 (q^{2n-2} - 1)}{q - 1} &= \frac{4a_1 (q^{2n-2} - 1)}{q - 1} \\ q^2 &= 4 \\ q &= \pm 2 \Rightarrow n+1 = 8 \Rightarrow \boxed{n = 7} \end{aligned}$$

פתרון חלופי: כל איבר בסדרת האחרונים גדול פי q^2 מהמקביל שלו בסדרת הראשונים (יש היסט 2 ימינה בין שתי הסדרות המתוארות) לכן $q = +2 \rightarrow q^2 = 4$ (שלילי נפסל: נתון שכולם חיוביים).

ב.

$$\begin{aligned} \frac{b_{k+1}}{b_k} &= \frac{1}{(a_{k+1} + a_{k+2})^2} \stackrel{\text{כפל בהופכי}}{=} \frac{(a_k + a_{k+1})^2}{1} = \\ &= \frac{(q^k (1+q))^2}{(q^k q (1+q))^2} = \frac{1}{q^2} = \boxed{\frac{1}{4}} \text{ קבוע ולכן הנדסית} \end{aligned}$$

ג. ראשית נמדל את הסדרה:

$$b_1, 2b_2, b_3, 2b_4, \dots$$

$$S_{b_{odd}} = \frac{1}{30} + 2S_{b_{even}}^{original}$$

$$\underbrace{\frac{b_1}{1 - \frac{1}{4^2}}}_{15/16} = \frac{1}{30} + \frac{2b_2}{15/16} / 30 \cdot \frac{15}{16}$$

$$30b_1 = \frac{15}{16} + 60b_1 \cdot \frac{\hat{1}^{q_b}}{4}$$

$$15b_1 = \frac{15}{16}$$

$$b_1 = \frac{1}{16} = \frac{1}{(a_1 + a_2)^2}$$

$$\sqrt{16} = a_1 + a_1 \underbrace{q_a}_2$$

$$3a_1 = 4$$

$$\boxed{a_1 = \frac{4}{3}}$$