משוואות וחקירה טריגונומטרית

גיא סידס

4 בדצמבר 2024

תוכן העניינים

קצת זהויות טריגו 3

זהויות שמבינים מתוך מעגל היחידה 3

זהויות ממשולש ישר זווית 3

זהות פיתגורס 4

זהויות שיש ללמוד בע"פ 4

פתרון משוואה בסיסית: 5

משוואה מטיפוס $\sin ax = b$ 5

משוואות מטיפוסים מורכבים יותר 6

הוצאת שורש 6

התלכדות פתרונות 7

משוואה ריבועית 9

נפתור את $cos2x - 7cosx = 3$ 9

פתרון משוואה מהצורה $a\sin mX + b\cos mX$ 10

דוגמאות נוספות 11

דוגמא נוספת למיזוג פתרונות $sin2x + sinx = 0$ 11

בגרויות חקירות טריגו ואינטגרלים: 13

בגרות 1 ש6 עם 3 13

בגרות 1 ש7 עם 3 15

בגרות 8 שאלה 33/6 + גוף סיבוב (שאינו בחומר) 16
בגרות מספר 9 , 37/7 20
בגרות 10 קיץ תשע"ב 2012 מועד א 22
בגרות 30 ש7 עמ 144 24
בגרות 41 ש7 עמ 231 26
בגרות 46 ש7 עמ 283 29

הקונטקס הכללי: פתרון משוואות טריגונומטריות ישמש בבגרות למציאת תחום הגדרה (איפוס מכנה או ת"ה של $tg(x)$), למציאה נקודות בהן מתאפסת הנגזרת, או בהן היא שווה לערך כלשהו (שיפוע משיק).

המשוואות בספרים מתחילות בכיתה יוד, ומוצגות במעלות. חשוב לבצע את המעבר לרדיאנים כמה שיותר מוקדם כדי להיות מורגלים לכך. בחקירה נעבוד רק ברדיאנים כדי שלחוקי הגזירה של פונקציות טריגו (שאנו מכירים) יהיה תוקף.

קצת זהויות טריגו

זהויות שמבינים מתוך מעגל היחידה

$$
\begin{aligned}
^{*}\sin x &= \sin\left(180^\circ - x\right)\\
\sin x &= -\sin\left(-x\right)\\
^{*}\cos x &= \cos\left(-x\right)\\
\cos x &= -\cos\left(180^\circ - x\right)
\end{aligned}
$$

*מהזהויות המסומכות בכוכבית "מביאים" את הפתרון השני למשוואות טריגונומטריות.

זהויות ממשולש ישר זווית

$$
\begin{aligned}
\sin x &= \cos\left(90^\circ - x\right)\\
\cos x &= \sin\left(90^\circ - x\right)
\end{aligned}
$$

בכל מקרה בו יש זווית $(90^\circ - x)$ מקובל מיד לתרגם לפונקציה השניה כדי "לנקות" את זה ולעבור ל- (x)

זהות פיתגורס

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

מאפשרת מעבר מסינוס לקוסינוס (ולהפך) כדי להגיע למשוואה שבה רק אחד משניהם כגון $\cos^2 x - \cos x - 2 = 0$

או סתם כדי להגיע למ.ש.ל (למי שזוכר השתמשתי בשיעור כדי לעבור מסינוסים לקוסינוסים)

זהויות שיש ללמוד בע"פ

$$\boxed{\sin(2x) = 2\sin x \cos x}$$

$$\boxed{\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1} = \cos^2 x - \sin^2 x$$

יתווספו עוד כמה בהמשך אבל ממש ממש מעט.

פתרון משוואה בסיסית:

הפתרון למשוואה טיפוסית כגון $sinx = \frac{\sqrt{3}}{2}$ מתחיל במחשבון:
$x = sin^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{2})$. פתרון כזה אינו מספיק משתי סיבות:

1. שכן הוא מתעלם מהמחזוריות. חשוב להתרגל מההתחלה לכלול את המחזוריות בפתרון. לכן כאשר מקבלים במחשבון 60°, צריך
   א. **מיידית לעבור לרדיאנים:** הפתרון אמור להתקבל כ- $\frac{1}{3}\pi$ ולא 60.
   ב. לרשום את הפתרון בצורה מחזורית: $x = \frac{1}{3}\pi + 2\pi k$
2. להוסיף את הפתרון שנובע מהזהות הטריגונומטרית: $x = \pi - \frac{1}{3}\pi + 2\pi k$
   ומכאן $x = \frac{2}{3}\pi + 2\pi k$

את אותה טכניקה יש להפעיל גם במשוואה של cos או tg. בכל מקרה עלינו לחתור למצב שבו רק פונקציה אחת נמצאת במשוואה.

משוואה מטיפוס $\mathbf{sin}ax = b$

הפתרון זהה לחלוטין למה שהוצג לעיל, פרט לטיפול זהיר יותר במחזוריות:
ניקח לדוגמא את $cos3x = 0.5$
במחשבון: $cos^{-1}(0.5) = \frac{\pi}{3}$
לכן הפתרון המחזורי **(פתרון ביניים)** הוא $3x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$
ממנו נקבל $x = \frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}\pi k$
כמו במקרה הפשוט, גם כאן נשלוף זהות טריגונומטרית בסיסית כדי לקבל את הפתרון המחזורי הנוסף:
$3x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$
ומכאן $x = -\frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}\pi k$

אין חובה להפוך את הייצוג לחיובי, אבל ניתן לצפות שבתוכנות שונות (למשל וולפרם) הפתרון שיוצג יראה שונה מהפתרון שקיבלנו בדיוק מסיבות כאלו.

במקרה של הדוגמא שלעיל ניתן לחסר $\frac{2}{3}\pi - \frac{\pi}{9}$ ולקבל $x = \frac{5}{9}\pi + \frac{2}{3}\pi k$

רצוי גם לא להיבהל כשרואים שבוולפרם הפתרון עדיין מופיע באופן שונה משלנו. מדובר בדיוק באותם הפתרונות (בסדר הפוך, לאחר הוצאת גורם משותף, ותוך שימוש ב-n במקום k):

$$x = \frac{1}{9}\left(6\pi n - \pi\right), n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{1}{9}\left(6\pi n + \pi\right), n \in \mathbb{Z}$$

בכל מקרה אין צורך להגדיר את k כשלם $(k \in \mathbb{Z})$ זה ברור בהקשר ולא נדרש. ואין גם צורך לחתור לתצורת הפתרון של וולפרם.

משוואות מטיפוסים מורכבים יותר

אציג כאן מספר סוגי משוואות ואת הדרך לפתרונן. שימו לב שכאשר זה מוצג באופן סדור, הכל נראה מאד ברור ופשוט. **הבעייה בדרך כלל במשוואות היא להבין לאיזה כיוון ללכת** (כאשר המשוואה לא במצב טריוויאלי), וזה דורש תרגול (ובהעדרו, ניסוי וטעייה).

אימון מסכם טוב הוא המשוואות בעמודים 198, 199 בכרך ב2 (ששונות בכך שאינן מוגשות "מוכנות למאכל" ואינן מסווגות) בשונה מהפרקים הסדורים בספר של כיתה יוד, ובכרך ב1 שבהם החומר לעוס).

הוצאת שורש

הוצאת שורש היא די פשוטה. לשים לב לקבל גם את הפתרון השלילי:

$$sin^2x = \frac{3}{4} \rightarrow sinx = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

במחשבון: $x = sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{3}\pi$

ושוב במחשבון: $-\frac{1}{3}\pi = x = sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (או מהיכרות עם מעגל היחידה).
נוסיף מייד את הייצוג המחזורי:

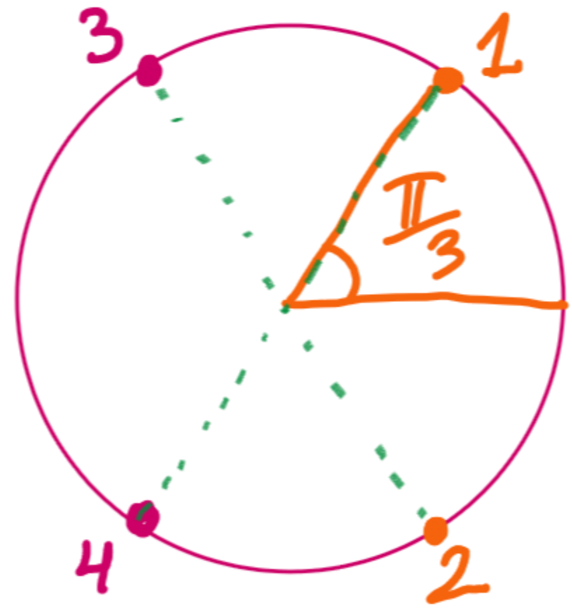
1. $x = \frac{1}{3}\pi + 2\pi k$ או,
2. $x = -\frac{1}{3}\pi + 2\pi k$ או

מזהויות טריגונומטריות $sin\alpha = sin\left(\pi - \alpha\right)$ נקבל בנוסף עוד שתי קבוצות של פתרונות:

3. $x = \pi - \frac{1}{3}\pi + 2\pi k = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$ או,
4. $x = \pi - -\frac{1}{3}\pi + 2\pi k = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k$

התלכדות פתרונות

במידת האפשר רצוי להציג את הפתרונות שמתלכדים (לא חובה, ולא ממש רלוונטי במקרה של חקירת משוואה בתחום מוגבל).
קבוצת הפתרונות לעיל 1, מתלכדת עם קבוצת הפתרונות 4: $x = \frac{1}{3}\pi + \boldsymbol{\pi} k$
קבוצת הפתרונות 2, מתלכדת עם קבוצת הפתרונות 3 ולכן: $x = \frac{2\pi}{3} + \boldsymbol{\pi} k$
ולכן, בסה"כ: $\boxed{x = \frac{1}{3}\pi + \pi k}$ או $\boxed{x = \frac{2\pi}{3} + \pi k}$. כדי לראות את זה צריך להסתכל על מעגל היחידה: ההפרש של π בין הקבוצות (הרלוונטיות הוא שמאפשר להציג אותם כפתרון מלוכד).


3
1
$\frac{\pi}{3}$
4
2

משוואה ריבועית

כאשר לא נמצא פתרון באמצעות הוצאת גורם משותף, ניתן בד"כ להגיע למשוואה ריבועית.

כך לדוגמא למשוואה כגון $2sin^2x-3sinx+1=0$ נתייחס לאחר הצבת t כ- $2t^2-3t+1=0$.

ניקח דווקא דוגמא אחרת:

$sin^2x-0.5=0$. גם דוגמא זו ניתן לפתור במחשבון באמצעות נוסחת השורשים עבור $t^2-0t-0.5=0$. עדיף כמובן (לא הכרחי) לזהות כפל מקוצר:

$$\left(t+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(t-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

ומכאן שיש לנו שתי משוואות: $sinx=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

מהמחשבון נקבל (עבור כל שורש בנפרד):

$$x=\frac{\pi}{4}+2\pi k$$

$$x=-\frac{\pi}{4}+2\pi k$$

ומהזהות הטריגונומטרית $sin\alpha=sin\left(\pi-\alpha\right)$ נייצר גם את קבוצות הפתרונות:

$$x=\frac{3}{4}\pi+2\pi k$$

$x=-\frac{3}{4}\pi+2\pi k$ (שימוש במעגל היחידה). בשימוש בזהות בלבד נקבל:

$$x=\pi--\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}+2\pi k$$

הפתרון כולו מתלכד ל- $\boxed{x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}}$ שניתן לרשום גם כ- $x=\frac{\pi(1+2k)}{4}$.

ונותר להדגים איך כל זה מתחבר בשאלה שאינה "לעוסה מראש":

נפתור את $cos2x-7cosx=3$

נסיון כושל יהיה לפתוח את 3, ואת $cos2x$ בצורה הטריוויאלית:

$$cos^2x-sin^2x-7cosx=3sin^2x+3cos^2x$$

התוצאה היא שאנחנו נשארים עם סינוסים וקוסינוסים וזה לא ממש מוביל לשום מקום,

פרט אולי לתובנה שצריך לנסות שוב. זה חלק בסיסי מעבודה עם משוואות טריגונומטריות:

לנסות שוב!

כיוון שהסינוסים מציקים, ניעזר דווקא בזהות $cos2x = 2cos^2x - 1$

כעת קיבלנו מצב הרבה יותר טוב:

$$2cos^2x - 1 - 7cosx = 3$$

ומכאן פותרים איך???

(הערה: כאן נתקלים בפעם הראשונה בפתרון שנפסל מסיבה חדשה)

פתרון משוואה מהצורה $a\mathbf{sin}mX + b\mathbf{cos}mX$

לא למדנו עדיין ולא צפוייה רמת קושי כזו בחקירת פונקציות, גם לא ב-571!

נפעל לפי השלבים הבאים:

1. חילוק המשוואה ב-a.
2. המרת $\frac{b}{a}$ ל-tg שאותו נמיר ל-$\frac{sin}{cos}$.
3. נבצע מכנה משותף של ה-cos.
4. נפעיל את הזהות $sin\left(\alpha \pm \beta\right) = sin\alpha cos\beta \pm cos\alpha sin\beta$ (כך נהפוך את כל אגף שמאל לפונקציה אחת, ואת אגף ימין למספר).

דוגמא:

$$3sin2x - \sqrt{3}cos2x = 3 \ / \div 3$$

$sin2x - \frac{\sqrt{3}}{3}cos2x = 1$ נחליף את $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ב-$tan\frac{\pi}{6}$ ואותו ב-$\frac{sin\frac{\pi}{6}}{cos\frac{\pi}{6}}$

$sin2x - \frac{sin\frac{\pi}{6}}{cos\frac{\pi}{6}}cos2x = 1$. נעלה על מכנה משותף:

נפעיל נוסחת סכום זוויות $\frac{sin2xcos\frac{\pi}{6}-sin\frac{\pi}{6}cos2x}{cos\frac{\pi}{6}}=1\ /\cdot\underbrace{cos\frac{\pi}{6}}_{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$$sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\rightarrow 2x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}+2\pi k$$
$$2x-\frac{\pi}{6}=\pi-\frac{\pi}{3}+2\pi k$$

ולסיום מעבירים אגפים ומחלקים ב-2:

$\boxed{x=\frac{\pi}{4}+\pi k}$ או

$$\boxed{x=\frac{5\pi}{12}+\pi k}$$

דוגמאות נוספות

דוגמא נוספת למיזוג פתרונות $sin2x+sinx=0$

$$sin2x=-sinx$$

$$sin2x=sin\left(-x\right)$$

בדרך לטעות $2x=-x$:

$$\cancel{3x=0\rightarrow x=0\rightarrow 0+2\pi k}$$

$$2x=-x+\boldsymbol{2\pi k}$$

$$3x=2\pi k$$
$$\boxed{x=\frac{2}{3}\pi k}$$

והפתרון השני:

$$2x=\pi-x+2\pi k$$

$$3x=\pi+2\pi k$$

$$\boxed{x = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi k}$$

וניתן למזג את שניהם לפתרון אחד:

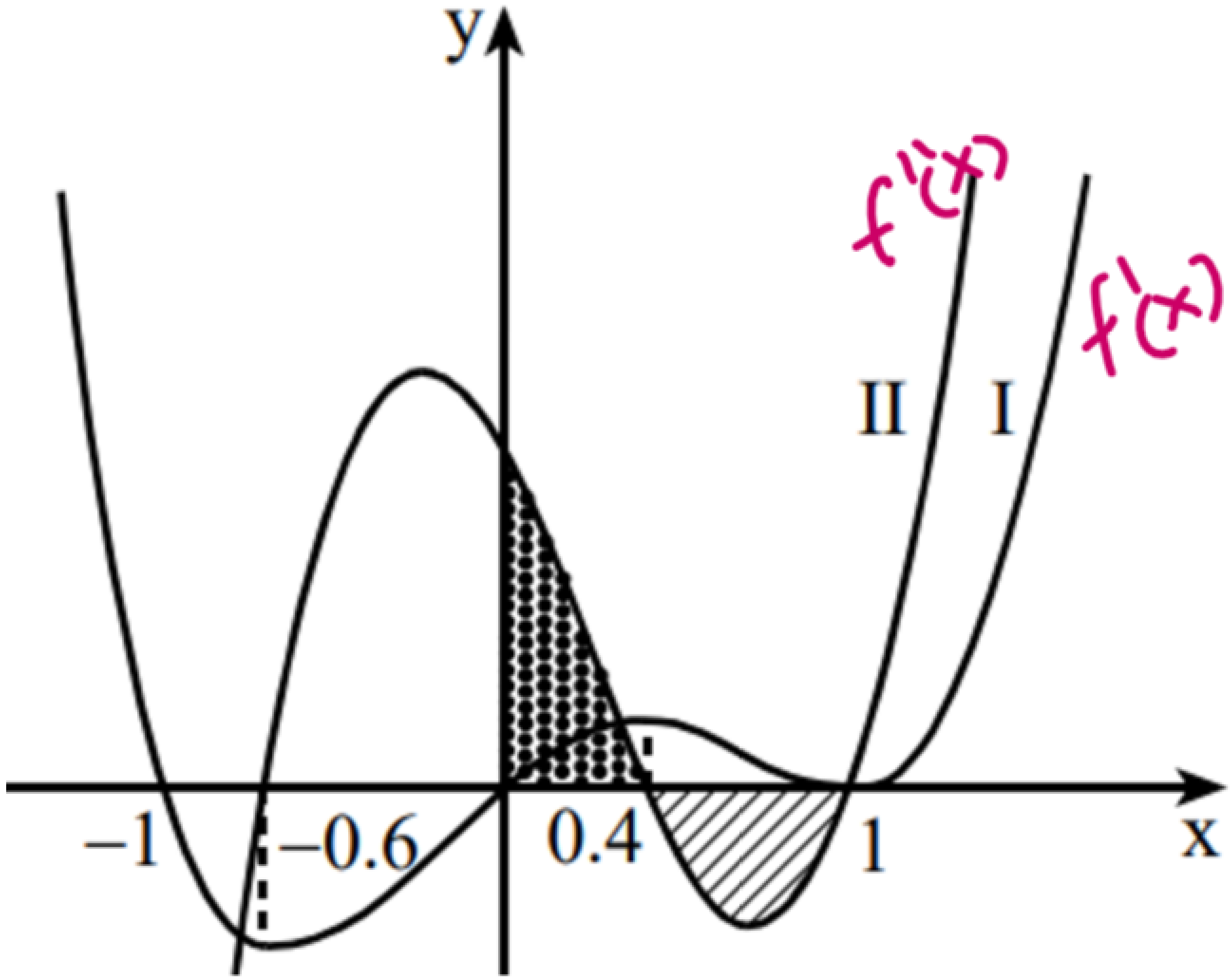
$\boxed{x = \frac{1}{3}\pi k}$ (את זה רואים על המעגל הטריגונומטרי: הזווית בין כל הפתרונות היא קבועה).

הערה: ניתן להשאיר פתרונות לא ממוזגים וזה לא פוגע בפתרון השאלה.

בגרויות חקירות טריגו ואינטגרלים:

בגרות 1 ש6 עמ 3

שאלת חשיבה. f'' הוא גרף 2 שכן הוא נגזרת של f': ניתן לראות שבבכל נקודות הקיצון של f' יש התאפסות של f''.



ב. נקודות קיצון של הפונקציה f יהיו ב-$x=-1$ וב-$x=0$ שיעורים בהם f' משנה סימן.

ג. פיתול ב- $x=1$ ב- $x=0.4$ וב- $x=-0.6$ (נקודות בהן הנגזרת השנייה משנה סימן).

ד. השטח שווה מפני ש- $f'(0)=f'(1)$. f' היא הפונקציה צוברת השטח של f'' כיוון שערכי הפונקציה שווים בשני שיעורי ה-x ניתן להסיק שלא נצבר שטח (כלומר שהשטח החיובי שנצבר שווה לשטח השלילי.

ניתן לבטא זאת אלגברית:

$$S_{\text{מנוקד}} = \int_0^{0.4} f''(x)dx = f'(x)\Big]_0^{0.4} = f'(0.4) = -f'(x)\Big]_{0.4}^{1} =$$
$$= \int_{0.4}^{1} 0 - f''(x)dx = S_{\text{מקווקו}} \text{ כרצוי} \blacksquare$$

בגרות 1 ש7 עמ 3

א. $f(x)=x-\frac{sin2x}{2}\to f'(x)=1-\frac{cos2x}{2}\cdot 2=1-2cos^2x+1=$

$$=2-2cos^2x=2sin^2x\cancel{+2cos^2x-2cos^2x}$$

כרצוי ■

ב1. נק' קיצון (התאפסות עם שינוי סימן של $2sin^2x$). זוהי פונקציה רציפה אי-שלילית. לכן אין קיצון.

ב2. יש נקודות פיתול: (הערה: בפונקציות רציפות וחלקות אם חשודת קיצון אינה קיצון, היא פיתול. יחד עם זאת אנחנו לא רשאים לטעון זה. זה נחשב "נפנוף ידיים" מפני שהטענה לא מתקיימת לכל פונקציה. תרשמו דבר כזה רק במצב של חוסר זמן).

נוכיח כי f'' משנה סימן: $f''(x)=\left(2sin^2x\right)'=4sinxcosx=2sin2x$. זוהי אכן פונקציה שמשנה סימן:

$\underbrace{sin2x}=0\to x=0+\frac{\pi}{2}k$ (לא חשובה המחזוריות - שכן די במציאת נקודה אחת)■

בגרות 8 שאלה 33/6 + גוף סיבוב (שאינו בחומר)

א. הוכחת זוגיות/אי-זוגיות/אחר של הפונקציה $f(x)=\frac{1}{cosx}$

הוכחה: $f(x)=\frac{1}{cos(x)}\underbrace{=}_{\text{זהות קוסינוס}}\frac{1}{cos(-x)}=f(-x)$ ומכאן שהפונקציה זוגית.

ב. בתחום $0\leqslant x\leqslant 2\pi$ מצא ת"ה, אסימפטוטות מקבילות לצירים, נקודות קיצון, סקיצה:

הפונקציה מוגדרת עבור $cosx\neq 0$ ומכאן $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$

אין בעייה לעבוד גם 2 פתרונות: $x\neq\frac{\pi}{2}+2\pi k$ ① $\wedge$ $x\neq-\frac{\pi}{2}+2\pi k$ ②. **נראה בדוגמא שלהלן**:

על כל פנים צריך למצוא את כל נקודות ההתאפסות כדי לרשום את התחום כאיחוד של תחומים:

נציב ב-①:

$x\neq\frac{\pi}{2}\leftarrow k=0$ בתחום.

$2\pi<\frac{5\pi}{2}\neq x\leftarrow k=1$ מחוץ לתחום

נציב ב-②:

$x\neq-\frac{\pi}{2}\leftarrow k=0$ מחוץ לתחום

$x\neq\frac{3\pi}{2}\leftarrow k=1$ בתחום.

בסה"כ 2 נקודות רלוונטיות ותחום ההגדרה שמתקבל הוא:

$$\boxed{0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\ \vee\ \frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{2}\ \vee\ \frac{3\pi}{2}\leqslant x\leqslant 2\pi}$$

ב2) אס' אנכיות ב- $x=1.5\pi$ וב- $x=\frac{\pi}{2}$ (מכנה מתאפס ומונה לא).

אס' אופקיות אין (הפונקציה מצומצמת לתחום סופי).

(גם אם היינו מנתחים את התחום $\mathbb{R}$, אבל בכל מקרה כאשר יש תחום מוגבל סופי לא תיתכן אס' אופקית).

ב3) קיצון:

$$f'(x)=\left((cosx)^{-1}\right)'=-1\,(cosx)^{-2}\underbrace{\cdot -sinx}_{\text{נגזרת פנימית}}=\frac{sinx}{cos^2x}$$

הערה: הסימון $^{-1}$ כאן הוא של חזקה שלילית ולא של הפונקציה ההפיכה של קוסינוס.

$f'(x) = 0 \to sinx = 0 \to x = \pi k$

ניתן היה גם לרשום את הפתרונות כשני פתרונות לא מלוכדים, ועדיין למצוא את כל שיעורי ה-x הרלוונטיים:

$x_1 = 0 + 2\pi k$

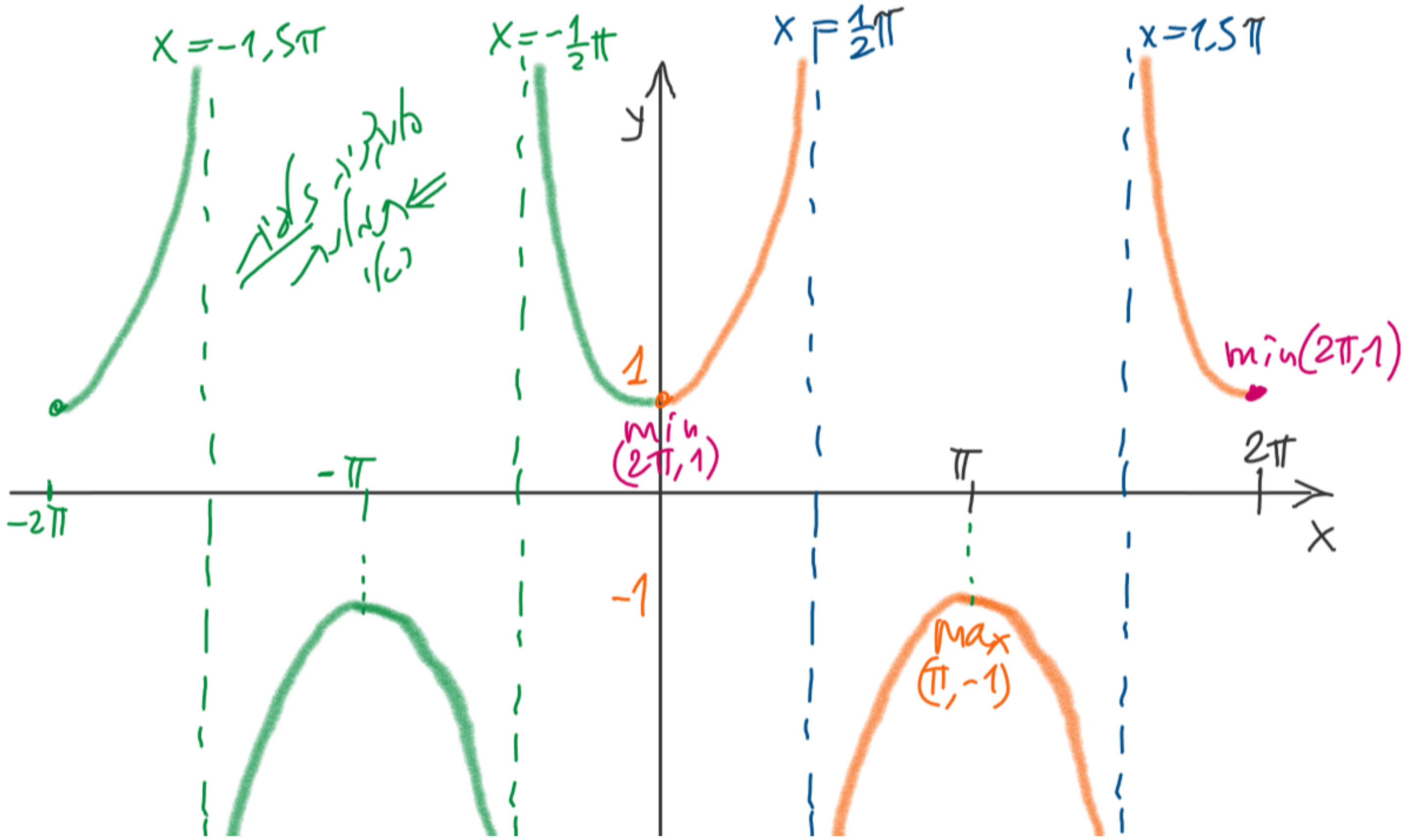
$x_2 = \pi + 2\pi k$ כך או כך חשודת קיצון הרלוונטית בתחום הנתון לנו היא $x = \pi$.

השיעורים $x = 0, x = 2\pi$ הם שיעורי x של קיצון קצה, ולא בזכות התאפסות הנגזרת (אם למשל התחום היה בין $0.1 \leqslant x \leqslant 6$ עדיין היו נקודות מינימום בשני הקצוות הנ"ל). בכל מקרה, אנו נדרש להציג מה קורה בקצוות התחום.

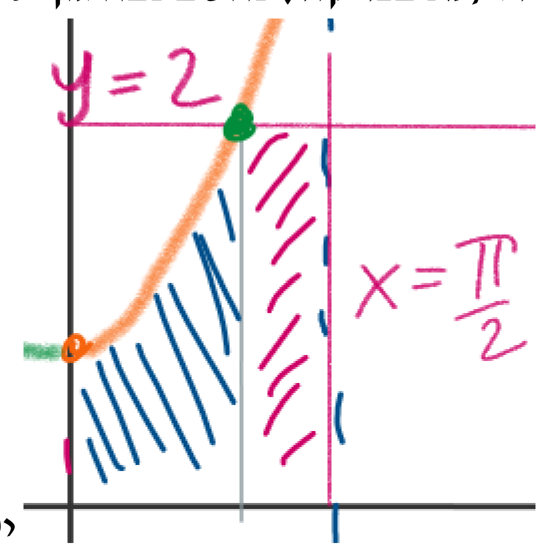
נכין טבלה הכוללת פרמטר עם הערכים $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ (חשודות קיצון ושיעורי אי-הגדרה):

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
y'	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0
y	min 1	$\nearrow$		$\nearrow$	max -1	$\searrow$		$\searrow$	min 1

ג) יש להוסיף לסרטוט גם את גרף הפונקציה בתחום : $-2\pi \leqslant x \leqslant 0$



ד. **(לא במיקוד) נחשב נפח גוף סיבוב** שמוגבל על ידי הפונקציה, והישרים $y=2$ ו- $x=\frac{\pi}{2}$



יש לחשב בנפרד את הנפח האדום והכחול, וראשית יש למצוא את הנקודה הירוקה (חיתוך בין הפונקציה לבין $y=2$)

נפתור $\frac{1}{cosx}=2\rightarrow cosx=0.5\rightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$ ובתחום שלנו $x=\frac{\pi}{3}$

לכן הנפח הוא גליל + אינטגרל:

גוף סיבוב: $V_{curve}=\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{cos^2x}dx=\pi tanx\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\pi tan\frac{\pi}{3}-0==\pi\sqrt{3}$

גליל: $V_{cylinder}=\pi r^2h=\pi\cdot 2^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=\pi^2\frac{4\pi}{6}$

והנפח הכולל הוא $\pi\sqrt{3}+\frac{2}{3}\pi^2$

הערה: לא ניתן להפוך את השאלה לשאלת חישוב שטח שכן אנו לא לומדים לחשב אינטגרל של $\frac{1}{cosx}$.

ה) רישום מחזורי של נקודות המינימום: $(2\pi k,1)$ מי שיכולים: ציינו גם $k\in\mathbb{Z}$ או רישמו ש- k שלם.

רישום מחזורי של נקודות המקסימום: $(\pi+2\pi k,-1)$

בגרות מספר 9 , 37/7

נתונה הפונקציה : $a > 0$,$f(x) = \frac{-a\cdot 16cosx}{\sqrt{16sinx+9}}$. יש למצוא תחום חיוביות ושליליות.

בתחום $-\frac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant \frac{7\pi}{6}$ המכנה תמיד חיובי. לכן f מוגדרת בכל התחום (מה שגם נתון).
מחיוביות המכנה, נובע שניתן לקבוע חיוביות ושליליות של f בהתאם למונה. כיוון ש-a חיובי, הפונקציה חיובית כאשר cos שלילי, ולהיפך. $cosx < 0 \rightarrow -\frac{\pi}{2} < x < 0$

ומכאן שבתחום שלנו מתקיים : $-\frac{\pi}{6} \quad \underbrace{f(x) < 0}_{cosx>0} \quad \frac{\pi}{2} \quad \underbrace{f(x) > 0}_{cosx<0} \quad \frac{7\pi}{6}$

א1) $f(x) > 0$ לכל $\frac{\pi}{2} < x < \frac{7\pi}{6}$

א2) $f(x) < 0$ לכל $-\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2}$

ב) $\int \frac{-a\cdot 16cosx}{\sqrt{16sinx+9}}dx \underset{\text{ניחוש}}{=\!=} \underbrace{-2}_{\text{תיקון מקדם}} a\sqrt{16sinx+9} + c$

ונגזור לבדיקה : $\frac{-\cancel{2}a\cdot 16cosx}{\cancel{2}\sqrt{16sinx+9}}$

או אינטגרל בשיטת ההצבה :

$$\int \frac{-a\cdot 16cosx}{\sqrt{16sinx+9}}dx \underset{\begin{pmatrix} t = 16sinx+9 \\ \frac{dt}{dx} = 16cosx \\ dt = 16cosx\cdot dx \end{pmatrix}}{=\!=\!=} \int -at^{-\frac{1}{2}}dt = -\frac{at^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = -2a\sqrt{t} + c$$

$$= -2a\sqrt{16sinx+9} + c$$

חישוב האינטגרל המסויים:

$$-2a\left[\sqrt{16sinx+9}\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}} = -2a(1-1) = 0$$

וקיבלנו שטח 0.

הערה: ניתן, וקל יותר להשאיר את המקדם $-2a$ מחוץ לחישוב האינטגרל כמו בדוגמא שלעיל.

ג) כיוון שקיבלנו שהאינטגרל מתאפס, נובע שהשטח השלילי מאופס על ידי השטח החיובי.

כיוון שנתון בנוסף שהשטח הוא 8 (כלומר שטח 4 שמאפס שטח 4), נשווה את האינטגרל המסויים בין $\frac{\pi}{2}$ ל- $\frac{7\pi}{6}$ ל-4. (בחלקה החיובי של הפונקציה).

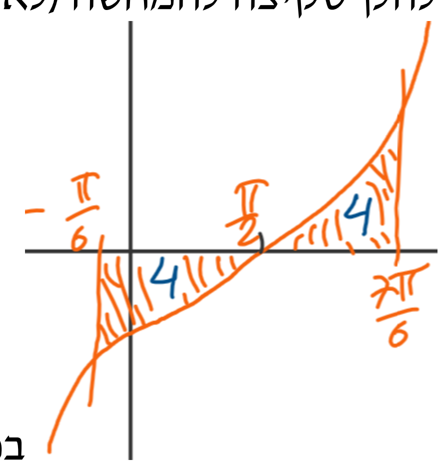
$$4 = -2a\left[\sqrt{16sinx+9}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{7\pi}{6}} = -2a\left(1-5\right)$$

$$-2a\left(1-5\right) = 4$$

$$8a = 4$$

$$a = \frac{1}{2}$$

להלן סקיצה להמחשה (לא נדרשה בשאלה).



במידה שלא ברור מה קורה בשאלה, ניתן ליצור סקיצת טיוטה (ארנבים) באמצעות $menu\ 9$ על הפונקציה. כאשר יש פרמטר לא ידוע, ניתן לקבוע אותו כ-1 או -1 לקבלת הסקיצה (סימן בהתאם לנתון).

בגרות 10 קיץ תשע"ב 2012 מועד א

נתונה $f(x)=4sin^2xcos^2x$

א. נק' החיתוך עם הצירים: $f(0)=0+\pi k$ (סינוס מתאפס), $f(x)=0\to cosx=0$ (בנוסף להתאפסות הסינוס) ומכאן $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$. הפתרונות מתלכדים ובסה"כ $x=\frac{\pi k}{2}$ ולכן $(\pi,0)$, $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$, $(0,0)$.

ב. קיצון: לפי הזהות $2sinxcosx=sin2x$ ניתן לראות כי $f(x)=sin^22x$ ומכאן (וזוהי פונקציה מורכבת של 3 שכבות $f(g(h(x)))$!!!) נקבל נגזרת:

$$f'(x)=2sin2x\underbrace{cos2x}_{\text{נג' פנימית}}\underbrace{\cdot 2}_{\text{נ' פנימית פנימית}}$$

לחילופין - לגזור לפי מכפלה.

קיבלנו $f'(x)=2sin4x$ (מהפעלת זהות זווית כפולה).

$f'(x)=0\to sin4x=0\to 4x=\pi k$. (הערה. ניתן להגיע לחשודות קיצון גם מבלי להגיע לזווית $4x$ (ללא זהויות).

ומכאן שחשודות קיצון הן $x=\frac{\pi k}{4}$. אם זה נכון זה לא נעים (5 נקודות חשודות בתחום $0\leqslant x\leqslant\pi$) זה הזמן לבדוק אם זה אכן המצב על הפונקציה. ניתן למשל לבדוק ב-$menu\,9$ את $\frac{d(f(x))}{dx}$ (כלומר לחשב בטבלה של המחשבון את מה שהמחשבון מחשב כערך הנגזרת).

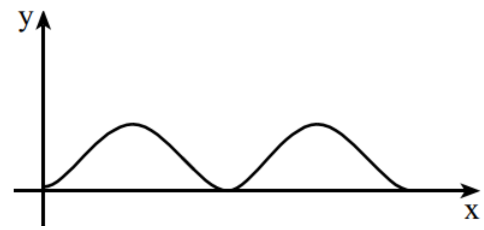
טיפה אגרסיבי אבל נותן וודאות גבוהה:

$f(x)=\frac{d}{dx}\left(4sin^2xcos^2x\right)_{x=\mathrm{x}}$. אם נגדיר $step=\frac{\pi}{8}$ נקבל גם את סימני הנגזרת.

הערה: החישוב הזה כבד. מומלץ רק ב- $991EX$. ניתן לשים במקביל ב-$g(x)$ את הנגזרת שקיבלנו. בכל מקרה תתקבל טבלה של 0 טורים:

x	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{2\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{4\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{6\pi}{8}$	$\frac{7\pi}{8}$	π
y'	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0
y	min $(0,0)$	$\nearrow$	max $\left(\frac{\pi}{4},1\right)$	$\searrow$	min 0	$\nearrow$	max 1	$\searrow$	min 0

ג. הסרטוט טריוויאלי.



ד. נתונה $g(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}sin\left(4x\right)$ ויש להוכיח ש $g'(x)=f(x)$. נגזור:

$$g'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}cos\left(4x\right)\underbrace{\cdot 4}_{\text{פנימית}}=\frac{1-cos(4x)}{2}=\frac{1-2cos^{2}2x+1}{2}$$

$$=1-cos^{2}2x\underset{\left(sin^{2}x+cos^{2}x=1\right)}{=\!=\!=\!=\!=}sin^{2}2x=4sin^{2}xcos^{2}x=f(x)$$

■ הערה: הוכחות אלו הן גם בדיקה שאתם יודעים לגזור, וגם הוכחת זהות טריגונומטרית פשוטה.

ה. חישוב השטח שבין f לציר ה-x בתחום הנתון:

$$S=\int_{0}^{\pi}f(x)dx=\Big[g\left(x\right)\Big]_{0}^{\pi}=g(\pi)-g(0)=\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{8}\underbrace{sin4\pi}_{0}-0=\frac{\pi}{2}$$

בגרות 30 ש7 עמ 144

$f\left(x\right)=sin\frac{\pi}{x}$

א. ת"ה - $x\neq0$.

ב. חיתוך עם x : $\frac{\pi}{x}=\pi k\rightarrow x=\frac{1}{k}\rightarrow\left(1,0\right),\left(\frac{1}{2},0\right),\left(\frac{1}{3},0\right)$

שכן כל היתר קטנים מ-$\frac{2}{7}$.

ג. קיצון : $f'\left(x\right)=cos\frac{\pi}{x}\cdot\left(\frac{\pi}{x}\right)'=cos\frac{\pi}{x}\cdot\left(\pi x^{-1}\right)'=-cos\left(\frac{\pi}{x}\right)\cdot\frac{\pi}{x^{2}}=\boxed{-\frac{\pi}{x^{2}}cos\left(\frac{\pi}{x}\right)}$

בדיקה : אוקי.

חשד לקיצון : $\frac{\pi}{x}=\frac{\pi}{2}+\pi k/\cdot x\div\pi$

$x\left(0.5+k\right)=1\rightarrow x=\frac{1}{0.5+k}$

עבור $k=-1,x<\frac{2}{7}$

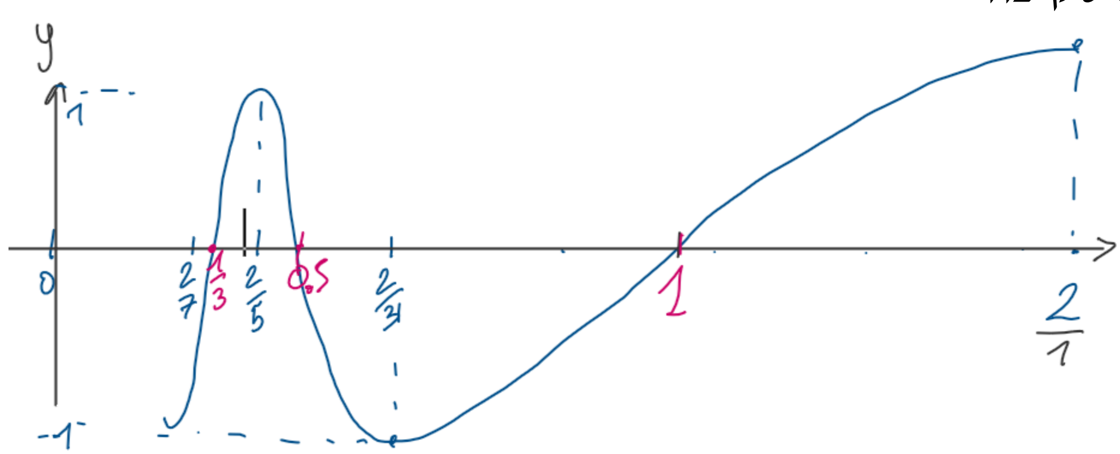
עבור $k=0\rightarrow x=2$

עבור $k=1\rightarrow x=\frac{1}{1.5}=\frac{2}{3}$

עבור $k=2\rightarrow x=\frac{1}{2.5}=\frac{2}{5}$

x	$\frac{2}{7}$	0.35	$\frac{2}{5}$	0.55	$\frac{2}{3}$	0.75	$\frac{2}{1}$	2.5
y'	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y	min -1	$\nearrow$	max 1	$\searrow$	min -1	$\nearrow$	max 1	$\searrow$

ד. סקיצה -



ה.כאשר x שואף ל-$+\infty$ הביטוי בתוך הסינוס שואף ל-0 ולכן הסינוס שואף ל-0. מכאן שהאסימטוטה $y = 0$ (קורה גם במינוס אינסוף אך לא ביקשו).

ו. הטענה I נכונה (החיתוכים הולכים ומצטופפים ככל שמתקרבים ל-0). טענה II ו-III מופרכות על ידי הנתונים שמצאנו (חיתוכים עם ציר x בסעיף ב.)

בגרות 41 ש7 עמ 231

$$f(x) = cos(mx) + cos(2x) \Longrightarrow f'(x) = -msin(mx) - 2sin(2x)$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2 = -msin\left(m\frac{\pi}{4}\right) - 2\underbrace{sin\left(2\frac{\pi}{4}\right)}_{1}$$

$$0 = -msin\left(\frac{m\pi}{4}\right)$$

$$sin\left(\frac{m\pi}{4}\right) = 0$$

$$\frac{m\pi}{4} = sin^{-1}(0) = \pi k$$

$$\frac{m\cancel{\pi}}{4} = \cancel{\pi}k / \div \pi \cdot 4$$

$m = 4k$ ולכן מתחלק ב-4 כרצוי

ב. $f(x) = cos(4x) + cos(2x) \Longrightarrow f'(x) = -4sin(4x) - 2sin(2x)$ מסעיף קודם.

$$cos(4x) + cos(2x) = 0$$

$$2cos^2(2x) - 1 + cos(2x) = 0$$

$$2t^2 + t - 1 = 0 \Longrightarrow t_{1,2} = 0.5, -1$$

$$cos2x = 0.5 \Longrightarrow 2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$$

$$\boxed{x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k}$$

$$cos2x = -1 \Longrightarrow 2x = \pi + 2\pi k$$

$$\boxed{x = \frac{\pi}{2} + \pi k}$$

ב2. קיצון :

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow -4sin(4x) - 2sin(2x) = 0$$

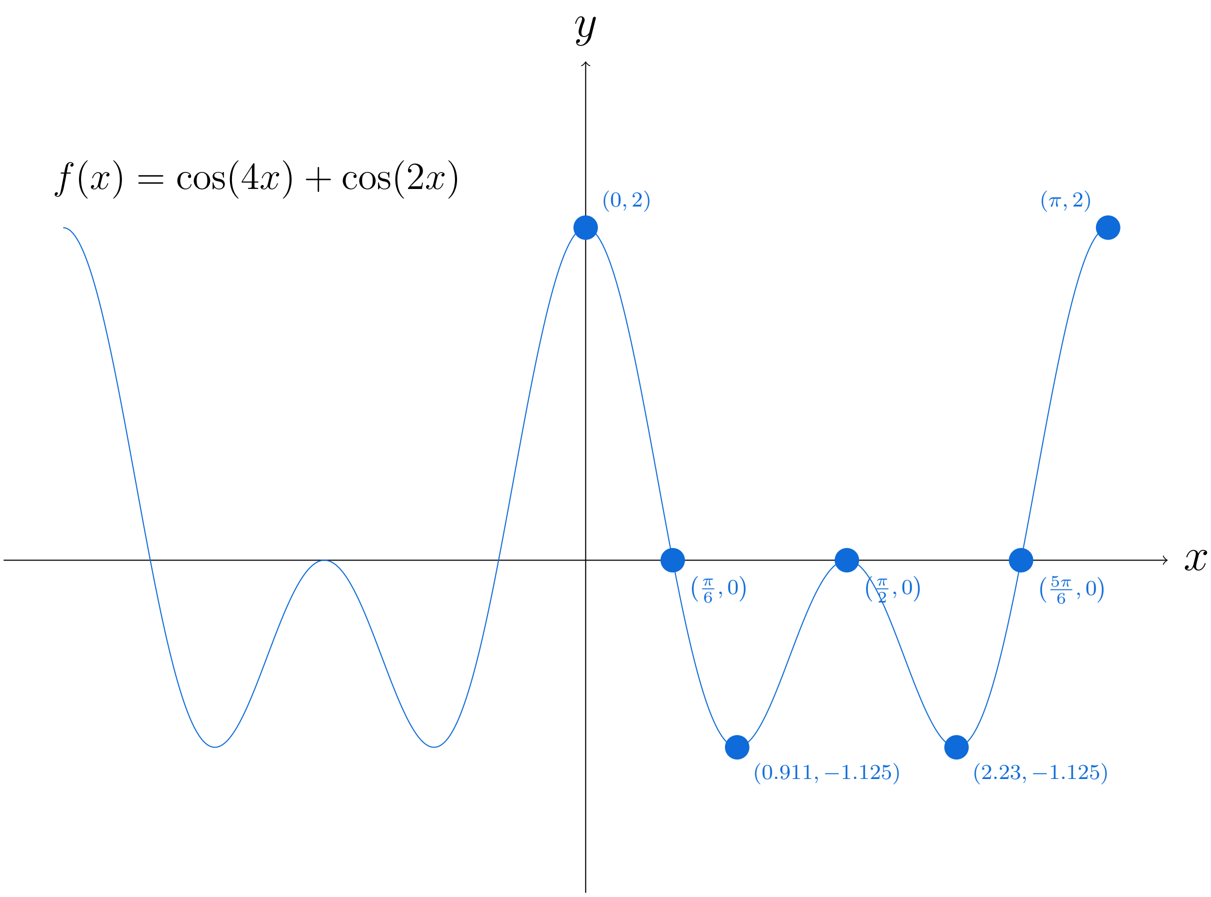
$$-8sin(2x)\,cos(2x) - 2sin(2x) = 0$$

$$\underbrace{-2sin(2x)}_{\boxed{2x = \pi k \to x = \frac{\pi}{2}k}} \cdot \underbrace{(4cos2x + 1)}_{cosx = -0.25} = 0$$

$$2x = cos^{-1}(-0.25) = \pm 1.823 + 2\pi k$$

$$\boxed{x = \pm 0.911 + \pi k}$$

ג. f זוגית (חיבור של שתי פונקציות קוסינוס זוגיות), לכן הסקיצה ב-$0 \leqslant x$ היא שיקוף ביחס לציר y של הסקיצה ב- $[0, \pi]$. סקיצה :



ד. גרף 1.

הסקיצה ששרטטנו מייצגת נגזרת של $k\left(x\right)$ לכן, נחפש גרף שבו יש עליה בקטע $\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$ ובקטע $\left[\frac{5\pi}{6},\pi\right]$. שני הגרפים המתאימים הם א' וד'. ההבדל בינהם הוא רק בחיתוך עם ציר ה-x בנקודה $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$. גרף 1 חותך בשיפוע 0 וזהו בדיוק השיפוע המתאים, מפני שהנגזרת שלנו עוברת משליליות ל-0 ושוב לשליליות (מתקבל שיפוע 0 ופיתול).

בגרות 46 ש7 עמ 283

א) הוכחת זוגיות של $f\left(x\right)=sin^{2}\left(x\right)-cos^{2}\left(x\right)-1$

$$f(-x)=\left(sin\left(-x\right)\right)^{2}-cos^{2}\left(-x\right)-1=^{*}\left(-sinx\right)^{2}-cos^{2}x-1$$
$$=^{**}sin^{2}\left(x\right)-cos^{2}\left(x\right)-1=f\left(x\right)$$

* $sin\left(-x\right)=-sin\left(x\right),\ cos\left(-x\right)=cos\left(x\right)$ זהויות ממעגל היחידה.

** $\left(-x\right)^{2}=x^{2}$

ולכן זוגית כרצוי.

ב)

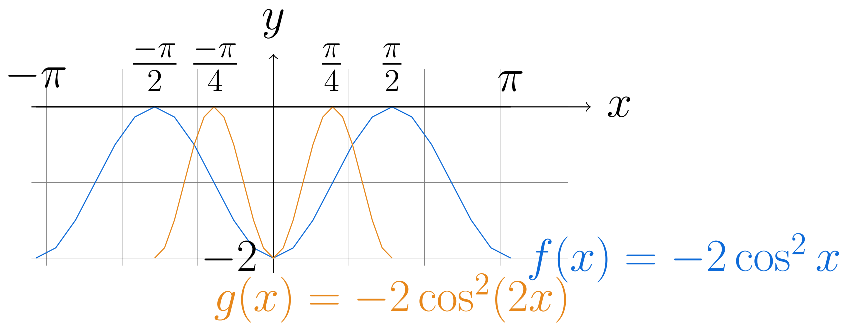
$$f\left(x\right)=sin^{2}x-cos^{2}x-1=sin^{2}x-cos^{2}x\underbrace{-sin^{2}x-cos^{2}x}_{-1}=-2cos^{2}x$$

ידוע כי $0\leqslant cos^{2}x\leqslant1$ ומכאן ש- $-2\leqslant-2cos^{2}x\leqslant0$ כרצוי.

ג)חיתוך מוכלל: $cos^{2}x=0\rightarrow cosx=0\rightarrow x=\frac{\pi}{2}+\pi k$

חיתוך בתחום $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$: $f\left(0\right)=-2\rightarrow\boxed{\left(0,-2\right),\left(-\frac{\pi}{2},0\right),\left(\frac{\pi}{2},0\right)}$

ד) סקיצה:



ה) נקודות הקיצון של $g(x)$ מתקבלות מכיווץ חלקי 2 ביחס ל-$f\left(x\right)$. כל נקודת קיצון של f זזה בשיעור מחצית.

נקודות המקסימום של f הן $\left(\frac{\pi}{4},0\right)$, $\left(-\frac{\pi}{4},0\right)$ והמינימום $(0,-2)$ הן נקודות החיתוך שמצאנו, מפני שנקודות החיתוך הן בשיעור y המקסימלי והמינימאלי שהוכחנו בסעיף ב', (כלומר, בהכרח, ערכן הוא המירבי / המזערי בסביבתן).

לסיום הסקיצה והשלמת הקיצון די אם נחשב את ערך הפונקציה בקצה (או קצות) התחום ונקבל מינימום קצה ב- $\left(\frac{\pi}{2},-2\right)$, $\left(-\frac{\pi}{2},-2\right)$.

ו. מזוגיות שתי הפונקציות נובע שההפרש $g\left(x\right)-f\left(x\right)$ מימין לציר ה-y ומשמאלו סימטרי.

$$S\underbrace{=}_{\text{נתון}}\int_0^{\frac{\pi}{8}}g'\left(x\right)-f'\left(x\right)dx=\Big[g\left(x\right)-f\left(x\right)\Big]_0^{\frac{\pi}{8}}=g\left(\frac{\pi}{8}\right)-f\left(\frac{\pi}{8}\right)-\underbrace{0}_{g(0)=f(0)}$$

נובע $S=g\left(\frac{\pi}{8}\right)-f\left(\frac{\pi}{8}\right)$ ומכאן ש -

$$\int_{-\frac{\pi}{8}}^0 g'\left(x\right)-f'\left(x\right)dx=\Big[g\left(x\right)-f\left(x\right)\Big]_{-\frac{\pi}{8}}^0=0-\left(g\left(\frac{\pi}{8}\right)-f\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)=-S$$