וקטורים

גיא סידס

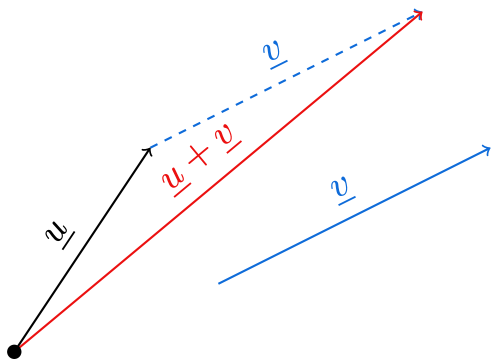
2 ביולי 2024

תוכן העניינים

וקטור גיאומטרי

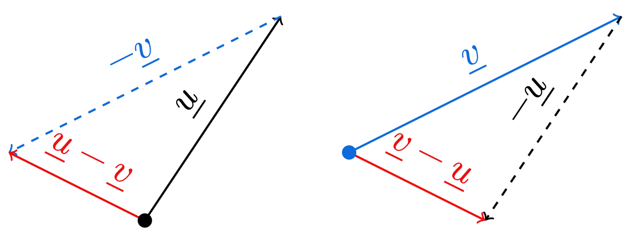
וקטור הוא **גודל שיש לו כיוון**. נייצגו באמצעות חץ. וקטורים משמשים לייצוג מהירות, תאוצה, כוח, וכו'. לגדלים ללא כיוון נקרא מעתה סקלר (לדוגמא - טמפרטורה).

סימון: נסמן וקטורים באותיות $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{z}$ עם קו תחתון. בהמשך, במקרה של צלע כגון AB נשתמש גם בסימון $\vec{AB}$. קיימים סימונים נוספים (בהם לא נשתמש).

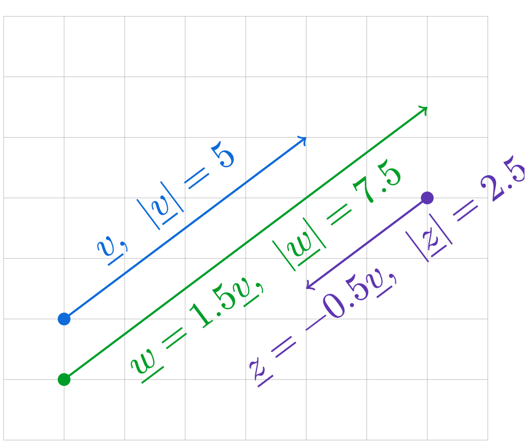


שוויון וקטורים: אין חשיבות למיקום הוקטור במישור/במרחב. שני וקטורים שווים אם יש להם אותו גודל ואותו כיוון.

חיבור וקטורים נעשה בהצמדת עקב וקטור אחד לראש הוקטור האחר. **אין חשיבות לסדר** בחיבור, בדומה לחיבור מספרים.

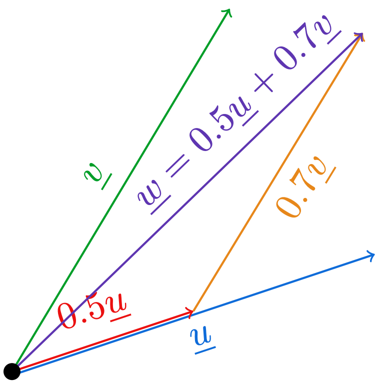


חיסור וקטורים נעשה בהצמדת עקב הווקטור המחוסר לראש הוקטור ממנו מחסרים. **יש חשיבות לסדר** (בדומה לחיסור מספרים).



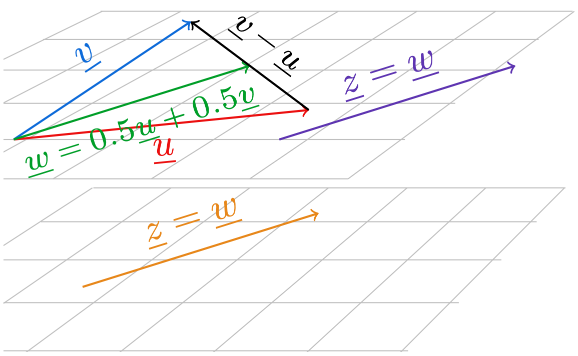
כפל בסקלר: **סקלר**, או באנגלית $scalar$ מהמילה $scale$ ומהמילה סקאלה, הוא פשוט מספר. ניתן להשתמש בכפל בסקלר כדי להגדיל, להקטין, או להפוך כיוון של וקטור, מבלי לשנות את כיוונו:

קולינארי: וקטור התלוי לינארית בווקטור יחיד (כלומר נוצר מכפל של אותו וקטור בסקלר). אורכם יכול להיות שונה אך כיוונן זהה (או מנוגד), (ראו שרטוט). נושא האורך יובהר בפרקים בנושא וקטור אלגברי, ראו אורך וקטור)



תלות לינארית: אם קיימים סקלרים s, t כך ש- $\underline{w} = s\underline{u} + t\underline{v}$ נאמר כי $\underline{w}$ תלוי לינארית ב- $\underline{u}, \underline{v}$, או ש-$\underline{w}$ קומבינציה לינארית של $\underline{u}, \underline{v}$ (ראו שרטוט).

משפט: כל שני וקטורים בלתי תלויים במישור פורשים את המישור (מהווים בסיס למישור).



משפט: אם וקטור הוא קומבינציה לינארית של שני וקטורים הפורשים מישור (כלומר בלתי תלויים), אז הוא במישור או במישור מקביל לו.

תכונות: וקטור התלוי ב-$\underline{u}, \underline{v}$, כאשר הם יוצאים מאותה נקודה, **ומסתיימים על ישר אחד**: יהי $\underline{w} = t\underline{u} + s\underline{v}$, וקטור היוצא מאותה נקודה **אז**:

1. אם $s + t = 1$ אז גם $\underline{w}$ **מסתיים על הישר** (המחבר בין ראשיהם של $\underline{u}, \underline{v}$). בדוגמא שלעיל $s = 0.5, t = 0.5$.

2. $\underline{w}$ מסתיים על צלע המשולש שנוצר בין הישר לבין $\underline{u}, \underline{v}$, אלא אם אחד מבין $s, t > 1$ (ואז הוא על המשך הצלע).

3. במקרה של $s = 0.5, t = 0.5$ מדובר באמצע הצלע.

נוכיח זאת ע"י מציאת שני מסלולים המגיעים לאותה נקודה:

(א) מסלול מקצהו של $\underline{u}$ לקצהו של $\underline{v}$, וכפל ב-0.5: הוקטור המייצג את הישר הנ"ל היוצא מקצהו של $\underline{u}$ הוא $-\underline{u}+\underline{v}$. מחצית הוקטור היא $0.5\,(-\underline{u} + \underline{v})$, כלומר $0.5\underline{v} - 0.5\underline{u}$ ובהגדרה (כיוון שכפלנו ב-0.5), זהו וקטור המגיע לאמצע הצלע.

(ב) ניתן לצאת מאותה נקודה ולהגיע גם במסלול שונה: $-\underline{u} + \underline{w}$ ולקבל בדיוק את אותה תוצאה $0.5\underline{v} - 0.5\underline{u}$. לכן קצהו של $\underline{w}$ הוא אמצע הצלע.

מכפלה סקלארית (וקטור גיאומטרי)

מכפלה סקלארית: נקראת גם dot product מסומנת $\underline{u} \cdot \underline{v}$, תוצאתה היא סקלאר (כלומר מספר) ולא וקטור, והיא מחושבת כמכפלת הגדלים של הוקטורים בקוסינוס הזווית שבינהם.

$$\boxed{\underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \cos\alpha}$$

תכונות ושימושים של מכפלה סקלארית

1. מציאת **זווית**: הגדרת המכפלה הסקלרית מאפשרת לחלץ את הזוית בין שני וקטורים: $\cos\alpha = \frac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{|\underline{u}| \cdot |\underline{v}|}$
2. וקטורים **מאונכים**: כיוון ש-$\cos 90^\circ = 0$ מכפלתם הסקלארית של וקטורים מאונכים שווה 0. כלומר,
$$\underline{u} \perp \underline{v} \Leftrightarrow \underline{u} \cdot \underline{v} = 0$$
תכונה זו מקלה על כפל וקטורים כאשר כופלים וקטורים המורכבים ממספר וקטורים.
3. $\underline{u} \cdot \underline{u} = |\underline{u}|^2$

להלן דוגמא של שימוש בתכונות אלו להוכחת מאונכות של וקטורים. בדוגמא, חישוב מכפלה סקלרית של וקטורים המורכבים ממספר וקטורים, כאשר חלקם מאונכים זה לזה:

מציאת מסלול והוכחת מאונכות

מתוך בגרות 40 ש2ע סעיף ב1

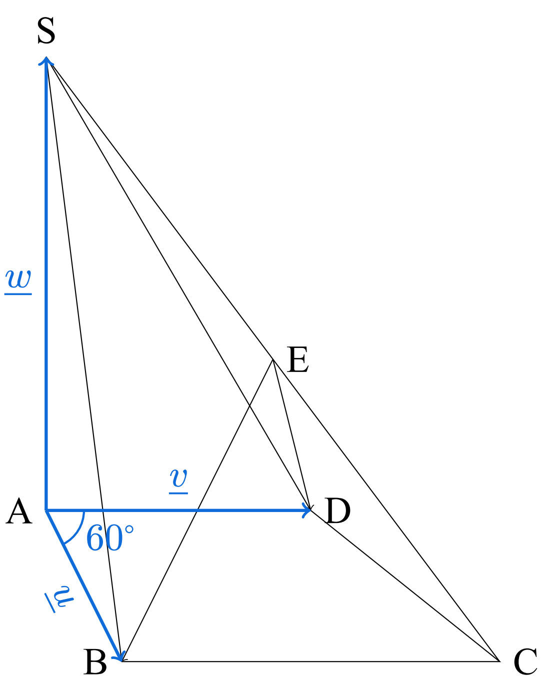
נתונה פירמידה מרובעת $SABCD$ כאשר בסיסה הוא מעוין.

נתון $\vec{SA}$ מאונך לבסיס הפירמידה, $SA = BA, \measuredangle BAD = 60^\circ$,

$\vec{SE} = t \cdot \vec{SC}$, $0 < t < 1$ הוא פרמטר.

נסמן $\vec{AB} = \underline{u}$, $\vec{AD} = \underline{v}$, $\vec{AS} = \underline{w}$.

א. הבע את הוקטורים $\vec{ED}, \vec{EB}$ באמצעות $\underline{w}$, $\underline{v}$, $\underline{u}$, t.



פתרון: $ABCD$ מעויין $\leftarrow |\underline{u}| = |\underline{v}|$, $AB \parallel CD, AD \parallel BC,$

ומהנתון $SA = BA \leftarrow |\underline{u}| = |\underline{w}|$

$$\underset{\text{על SC}}{E} \Longrightarrow \underset{0<t<1}{\vec{SE} = t \cdot \vec{SC}}$$

$$SA \perp ABCD \Longrightarrow \vec{SA} \perp \vec{AD} \Longrightarrow \vec{SA} \cdot \vec{AD} = 0$$

$$\underline{w} \cdot \underline{v} = 0$$

$$\vec{SA} \perp \vec{AB} \Longrightarrow \underline{u} \cdot \underline{w} = 0$$

מציאת מסלול: הבעת וקטורים מבוצעת על ידי מציאת מסלול מעקב הוקטור לראש הוקטור:

$$\vec{SC} = -\underline{w} + \underline{u} + \underline{v}$$
$$\vec{EC} = (1-t)\,\vec{SC} = (1-t)\,(\underline{u} + \underline{v} - \underline{w})$$
$$\vec{EB} = \vec{EC} + \vec{CB} = (1-t)\,\underline{u} + (1-t)\,\underline{v} + (t-1)\,\underline{w} - \underline{v}$$
$$\boxed{\vec{EB} = (1-t)\,\underline{u} - t\underline{v} + (t-1)\,\underline{w}}$$
$$\vec{ED} = \vec{EC} + \vec{CD} = (1-t)\,\underline{u} + (1-t)\,\underline{v} + (t-1)\,\underline{w} - \underline{u}$$
$$\boxed{\vec{ED} = -t\underline{u} + (1-t)\,\underline{v} + (t-1)\,\underline{w}}$$

ב. נתון $t = \frac{1}{2}$. ב(1) הוכח כי $\vec{EB}$ מאונך ל-$\vec{ED}$.

פתרון:

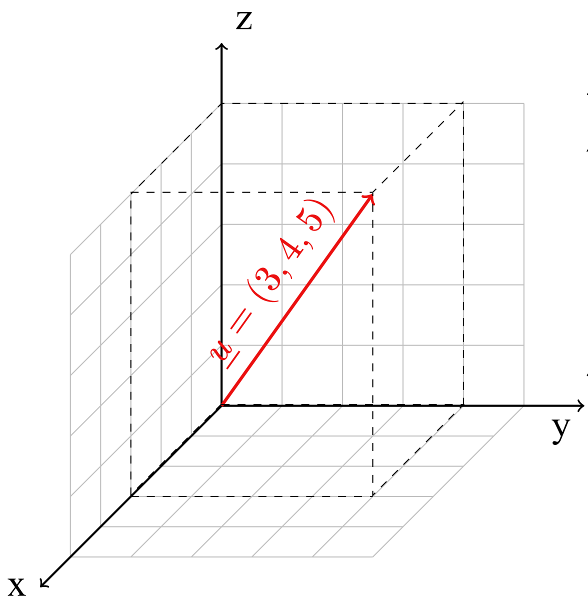
$$\vec{EB} = \frac{1}{2}\underline{u} - \frac{1}{2}\underline{v} - \frac{1}{2}\underline{w} \quad \leftarrow t = \frac{1}{2}$$
$$\vec{ED} = -\frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v} - \frac{1}{2}\underline{w}$$
$$\measuredangle BAD = 60^\circ \to \cos 60^\circ = \frac{\underline{u}\cdot\underline{v}}{|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|} \to \underline{u}\cdot\underline{v} = \frac{1}{2}\,|\underline{u}|^2$$
$$\vec{EB}\cdot\vec{ED} = \frac{1}{2}\,(\underline{u} - \underline{v} - \underline{w})\,\frac{1}{2}\,(-\underline{u} + \underline{v} - \underline{w})$$
$$= \frac{1}{4}(-\underline{u}\cdot\underline{u} - \underline{v}\cdot\underline{u} + \overbrace{\underline{w}\cdot\underline{u}}^{0} - \underline{u}\cdot\underline{v} - \underline{v}\cdot\underline{v} + \overbrace{\underline{w}\cdot\underline{v}}^{0} - \overbrace{\underline{u}\cdot\underline{w}}^{0} + \overbrace{\underline{v}\cdot\underline{w}}^{0} + \underline{w}\cdot\underline{w})$$

את כל אלו שמתאפסים פשוט לא כותבים

$$= \frac{1}{4}\left(-\,|\underline{u}|^2 + 2\overbrace{\underline{u}\cdot\underline{v}}^{\frac{1}{2}|\underline{u}|^2} \cancel{-\,|\underline{v}|^2 + |\underline{w}|^2}\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left(-\,|\underline{u}|^2 + \frac{2}{2}\,|\underline{u}|^2\right) = 0 \quad \Longrightarrow \vec{EB}\perp\vec{ED}$$

וקטור אלגברי

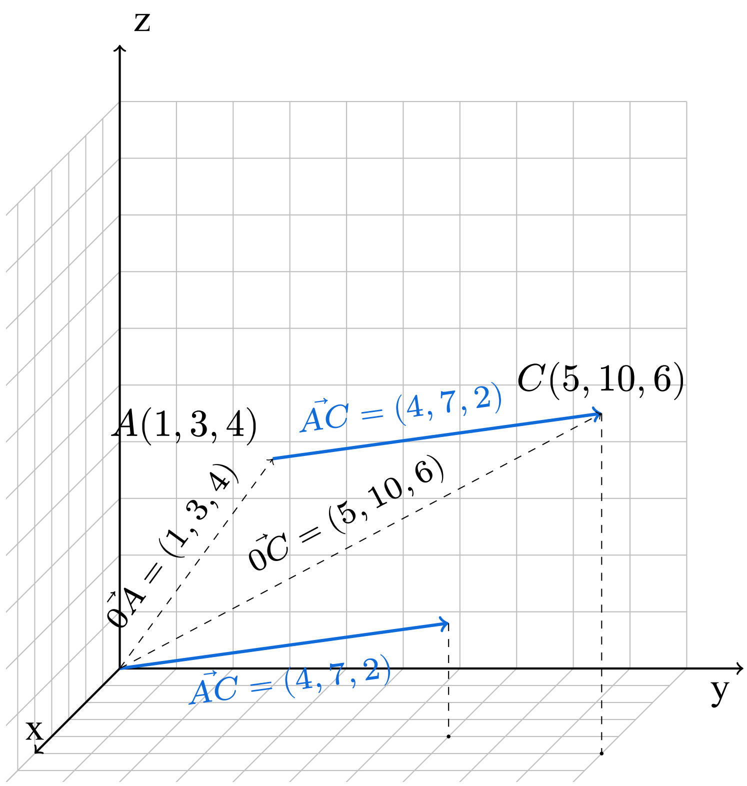
רישום וייצוג על מערכת צירים



$\underline{u}=(x,y,z)$ הוא צורת הרישום לוקטור שעקבו בראשית הצירים וראשו בנקודה (x,y,z), כאשר x,y,z מייצגים את מיקום הנקודה ביחס לצירים אלו.

לדוגמא, הוקטור $\underline{u}=(3,4,5)$

הכיוונים של x,y במערכת הצירים נראים משונים בתחילה, אך אלו הכיוונים המקובלים.



וקטור $\vec{AB}=(x,y,z)$ הוא תוצאה של חיסור נקודה B מנקודה A או אם נדייק, חיסור בין הוקטורים $\vec{0B}-\vec{0A}$ (המסלול מ-A ל-B).

לדוגמא: אם $B(5,7,9)\,,A(1,3,4)$ אז

$$\vec{AB}=(5-1,7-3,9-4)=(4,4,5)$$

דוגמא נוספת: באיור מופיעות הנקודות $A(1,3,4)$ ו- $C(5,10,6)$.

$$\vec{AC}=(5-1,10-3,6-4)=(4,7,2)$$

כפל בסקלר: $t\underline{u}=(tx_u,ty_u,tz_u)$

תלות לינארית: אם קיים t המקיים $t\underline{u}=\underline{v}$ נאמר כי הוקטורים תלויים לינארית.

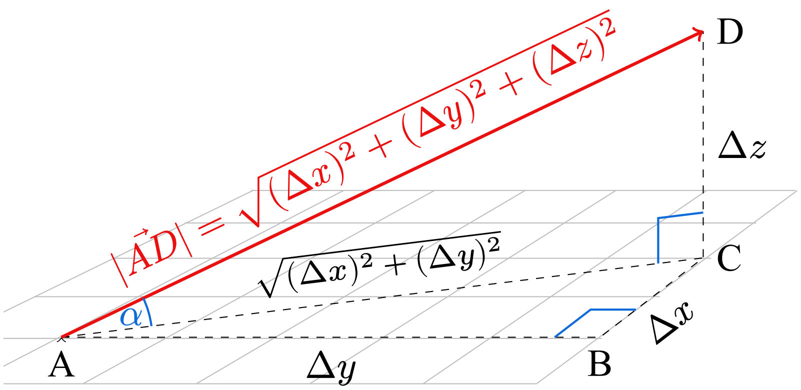
מכפלה סקלארית: יהיו $\underline{v}=(x_v,y_v,z_v)\,,\underline{u}=(x_u,y_u,z_u)$, אז $\boxed{\underline{u}\cdot\underline{v}=x_ux_v+y_uy_v+z_uz_v}$.

חשוב:

1. כפי שכבר ראינו תוצאת המכפלה היא סקלר (מספר) ולא וקטור.
2. מכפלה סקלרית עדיין מוגדרת לפי כללי הפילוג, (במכפלה יש 9 איברים - כולם כפול כולם - כולל $x_u z_v$, $x_u y_v$ וכו'), אולם, רכיבים כגון x_u, y_v מאונכים זה לזה, מכפלתם 0 ולכן בנוסחא מופיעות רק 3 מכפלות.

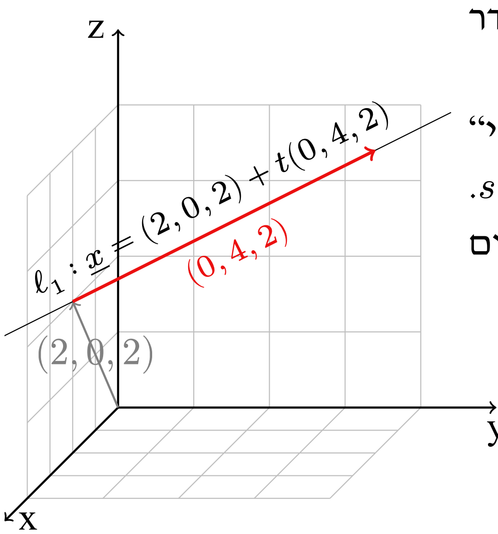
אורך וקטור

אורך וקטור יסומן בסימן ערך מוחלט $|\underline{x}|$
הנוסחה לאורך הוקטור $\vec{AD} = (x, y, z)$:
$\left|\vec{AD}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
נוסחה זו מתיישבת גם עם המושג ערך מוחלט באלגברה: $|x| = \sqrt{x^2}$ ונובעת הן משורש של המכפלה הסקאלרית של הוקטור כפול עצמו והן מפיתגורס במרחב (ראו שרטוט)



הישר: הצגה פרמטרית

בשונה מוקטור שצף במרחב ומייצג רק גודל וכיוון, לישרים יש מיקום מוגדר במרחב, באמצעות **נקודת עוגן**.
כיוון שישר הוא אוסף נקודות המקיימות בינהן אותו שיפוע, הישר "בנוי" מנקודת העוגן, אליה מוסיפים וקטור כיוון אותו כופלים בסקלר t או s.
כפל זה מאפשר להגיע לכל נקודה על הישר. וקטור הכיוון מבטיח את קיום השיפוע.
רישום ישר שונה ממה שראינו עד כה **ויש להקפיד עליו**:
לדוגמא: $\ell_1 : \underline{x} = \underbrace{(2,0,2)}_{\text{נקודת עוגן}} + t\underbrace{(0,4,2)}_{\text{וקטור כיוון}}$
רישום מקוצר: $\underline{p} + t\underline{v}$, כאשר $\underline{p}$ נקודת העוגן, ו- $\underline{v}$ וקטור הכיוון.
לנקודת העוגן ניתן להתייחס גם כווקטור העתקה המזיז את הישר ביחס לישר מקביל העובר בראשית.



נקודה כללית על הישר מתקבלת באמצעות פתיחת סוגריים. מהישר $\ell_2 : \underline{x} = (u_1, u_2, u_3) + t\,(v_1, v_2, v_3)$ תתקבל נקודה כללית: $(u_1 + tv_1,\ u_2 + tv_2,\ u_3 + tv_3)$

מציאת ישר העובר בין 2 נקודות:

1. נחשב וקטור כיוון (מסלול בין הנקודות / הפרש הנקודות).
2. נבחר אחת מהנקודות כנקודת עוגן, ונרשום את משוואת הישר הפרמטרית.

האם נקודה נמצאת על הישר:

1. נרשום נקודה כללית של הישר, ונשווה אותה לנקודה שקיבלנו. אם הנקודה על הישר, השוויון תקף בין כל זוג רכיבים.
2. נשווה בין זוג רכיבים ונחשב את t המקיים את השוויון.
3. נציב את t שקיבלנו בשוויונות הנוספים. אם הם מתקיים, הנקודה על הישר.

מצב הדדי בין ישרים

ישרים יכולים להיות:

1. מתלכדים (נקודה משותפת ווקטורי כיוון קולינאריים).
2. מקבילים (וקטורי כיוון קולינאריים, אך אין נקודה משותפת)
3. נחתכים (נקודה **משותפת** אך וקטורי כיוון בלתי תלויים)
4. מצטלבים (וקטורי כיוון בלתי תלויים ואין נקודה משותפת).

לקביעת המצב ההדדי בוחנים:

- קולינאריות,
- קיום נקודה משותפת

ובהתאם לתוצאות ניתן להסיק מה המצב ההדדי.

המישור: הצגה פרמטרית

בדומה לישר, מישור בנוסף להיותו נפרש ע"י ידי שני וקטורי כיוון, מוזז מהראשית על ידי נקודת עוגן, ונרשם כך:

$\pi_1 : \underline{x} = (p_1, p_2, p_3) + t\,(u_1, u_2, u_3) + s\,(v_1, v_2, v_3)$ כאשר $\underline{p}$ נקודת העוגן, ו-$\underline{v}$, $\underline{u}$ פורשים את המישור.

דרך כל 3 נקודות עובר מישור יחיד. כדי **למצוא הצגה פרמטרית** של מישור כזה:

1. נחשב וקטורי כיוון בין 2 זוגות נקודות,
2. נבחר אחת מ-3 הנקודות כעוגן, ונרשום את ההצגה הפרמטרית. קיימות אינסוף הצגות אפשריות.

משוואת המישור

כאשר מבקשים משוואת מישור, מתכוונים רק לייצוג הבא:
$\boxed{ax+by+cz+d=0}$ כאשר (a,b,c)-ו הוא הנורמל למישור (וקטור המאונך למישור, ולכן לכל וקטור המוכל במישור), וכל נקודה (x,y,z) המקיימת את המשוואה, נמצאת על המישור.
בדף הנוסחאות ההתייחסות למשוואות מישור היא כך: $\boxed{\underline{v}\cdot\underline{x}+e=0}$
יש לקרוא את הנוסחה באופן הבא: $e=d$, $\underline{x}=(x,y,z)$, $\underline{v}=(a,b,c)$. אין בדף הנוסחאות התייחסות להצגה פרמטרית של מישורים.

מכפלה וקטורית למציאת הנורמל

למציאת **הנורמל** (וקטור הכיוון המאונך למישור) נשתמש כשניתן, ב**מכפלה וקטורית** של שני וקטורים הפורשים את המישור. תכונת המכפלה הוקטורית, היא מאונכות לוקטורים אלו. **חובה לציין במחברת הבחינה:**
"השתמשתי במכפלה וקטורית שתוצאתה היא וקטור המאונך לוקטורים הפורשים את המישור ולכן למישור".
קל לטעות בחישוב שיוצג להלן, לכן **הכרחי לבצע בדיקה במחשבון**.
לרישום מכפלה וקטורית משתמשים בסימן $\times$ ולא בסימן דוט $\cdot$ המציין מכפלה סקלרית. **תוצאת המכפלה היא וקטור**, ולא סקלר.
נדגים את המכפלה וקטורית, המכונה גם cross product, על וקטורי הכיוון $(3,0,1)\times(4,5,2)$:
בצד שמאל נרשום את המטריצה, ונחשב את הדטרמיננה שלה. תוצאת החישוב היא **הנורמל**.
בכל שלב של החישוב, מוסתר אחד הטורים (בתחילה x לאחר מכן y ולבסוף z) ומבוצע חיסור בין מכפלת האלכסון הראשי למכפלת האלכסון המשני. במקרה של הטור המוסתר x נחשב $5\cdot1-2\cdot0$. לפני התוצאה של הטור y יש לרשום סימן מינוס.

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \end{vmatrix} = \left(\underset{\substack{\Downarrow\\ -5}}{0\cdot2-1\cdot5},\ -(\underset{\substack{\Downarrow\\ -2}}{3\cdot2-1\cdot4}),\ \underset{\substack{\Downarrow\\ 15}}{3\cdot5-0\cdot4}\right)=(-5,-2,15)$$

יש חשיבות לסדר, במכפלה וקטורית. אם נבדוק במחשבון למשל $(3,0,1)\times(4,5,2)$ תתקבל תוצאה בסימנים הפוכים.

שימוש בתכונת המאונכות למציאת הנורמל

דרך ב' למציאת הנורמל שימושית בעיקר כאשר קיימים פרמטרים במשוואת המישור (לדוגמא - בגרות 47). במקרים אלו נשתמש במאונכות הנורמל לוקטורי הכיוון. ניעזר שוב בדוגמא $(4,5,2)$, $(3,0,1)$: נגדיר את הנורמל להיות (a,b,c). מתקיים:

$$(a,b,c)\cdot(3,0,1)=0 \Longrightarrow 3a+c=0 \Longrightarrow c=-3a$$

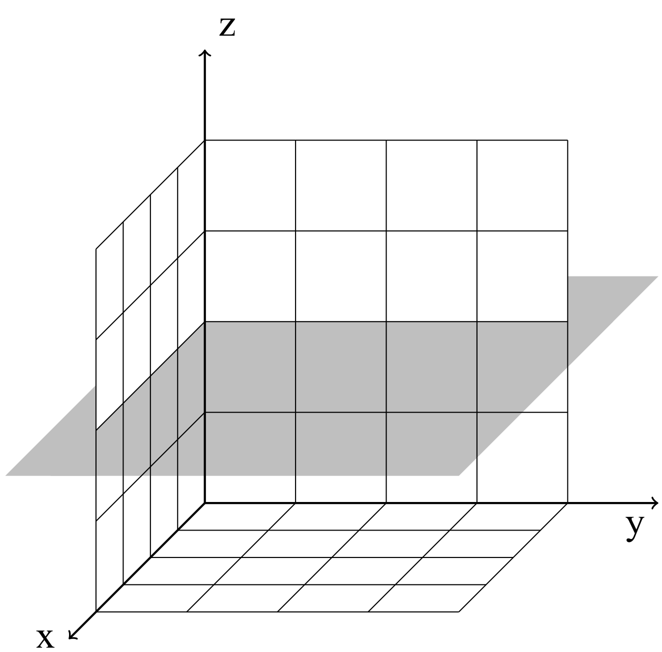
$$(a,b,c)\cdot(4,5,2)=0 \Longrightarrow 4a+5b-3a\cdot 2=0 \Longrightarrow 2a=5b$$

$$\underbrace{\boxed{b=1}}_{\text{קביעה שרירותית}} \Longrightarrow 2a=5$$

$$\Longrightarrow \boxed{a=2.5} \Longrightarrow \boxed{c=-7.5}$$

$\boxed{(2.5,\ 1,-7.5)}$ קולינארי עם התוצאה הקודמת

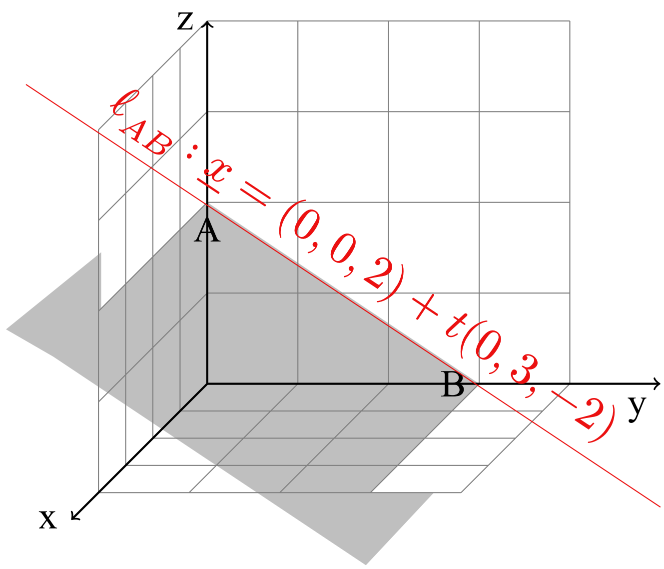
ניתן למצוא משוואת מישור מכל 3 נקודות שאינן על ישר אחד, ע"י חישוב וקטורי כיוון ומציאת נורמל. אם הנקודות הן על אותו ישר נקבל וקטורים קולינאריים ותוצאת המכפלה הוקטורית תהיה וקטור ה-0 $(0,0,0)$. לא ניתן להשתמש בכך שכן לא הוכחנו זאת.



מישורים המקבילים לצירים

להלן מספר דוגמאות למישורים המקבילים לצירים.

המישור $z-2=0$. לא משנה אילו ערכי x ו-y נבחר, תמיד $z=2$. המישור מקביל לציר ה-x ומקביל לציר ה-y.



במישור $2y + 3z - 6 = 0$ לא משנה איזה x נבחר. אם נקודה נמצאת על המישור, ונזיז אותה ב-x יחידות על ציר ה-x היא עדיין תהיה על המישור. המישור **מקביל לציר ה-x**.

נחשב את ישר החיתוך בין המישור הנ"ל למישור $[y, z]$ שמשוואתו $x = 0$ והוא מקביל לצירים y, z.

ראשית נמצא את $A\,(0,0,2)$ שמתקבלת מפתרון משוואת המישור כאשר מציבים $y = 0$ וקביעת $x = 0$.

שנית נמצא את B באופן דומה ($z = 0 \leftarrow y = 3$), ומתקבל $B\,(0,3,0)$. הוקטור $\vec{AB} = (0,3,-2)$ והישר הוא $A + \vec{AB}$, כלומר

$$\ell_{AB} : \underline{x} = (0,0,2) + t\,(0,3,-2)$$

מציאת ישר חיתוך בין מישורים

ראינו דוגמא פשוטה שניתן לשרטט. בד"כ לא נסרטט את המישורים במרחב, אלא נבצע חישובים תיאורטיים לקבלת ישר החיתוך.

בהינתן שתי משוואות, מישור, נסתמך על כך שישר החיתוך מוכל בשני המישורים, ולכן מאונך לנורמל של כל אחד מהם (הנורמל מאונך לכל ישר המוכל במישור, לא רק לוקטורים הפורשים אותו).

1. נמצא את הנורמל ע"י מכפלה וקטורית (או בהסתמך על תכונת המאונכות).
2. נחשב נקודה המשותפת לשני המישורים.
3. נכתוב את המשוואה הפרמטרית של הישר.

לדוגמא, ניקח את המישורים מבגרות 43 ש2: $z - 3 = 0 \quad :\pi_2\,,\qquad -y + z - 8 = 0 \quad :\pi_1$

1. נמצא את הנורמל:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \left(\underset{\substack{\Downarrow \\ -1}}{-1\cdot 1 - 1\cdot 0}, \; \underset{\substack{\Downarrow \\ 0}}{-(0\cdot 1 - 1\cdot 0)}, \; \underset{\substack{\Downarrow \\ 0}}{0\cdot 0 - -1\cdot 0} \right)$$

$$= (-1, 0, 0)$$

קיבלנו כיוון של ישר המקביל לציר ה-x (בדיעבד, ניתן לראות במשוואות המישורים ששניהם מקבילים לציר x).

2. נפתור את מערכת המשוואות של המישורים כדי לקבל נקודה הנמצאת על שני המישורים:

$$\begin{cases} z-3=0 \\ -y+z=8 \end{cases} \Bigg] \Longrightarrow \begin{matrix} z=3 \\ y=-5 \end{matrix} \Longrightarrow \left(\underset{\substack{\Downarrow \\ \text{שרירותי}}}{0}, -5, 3 \right)$$

ברוב המקרים לא יתקבלו ערכים ספציפיים ל-x, y, z אלא רק הקשר בינהם. במקרים אלו קובעים שרירותית את אחד או יותר מהערכים (כפי שקבענו כאן $x = 0$).

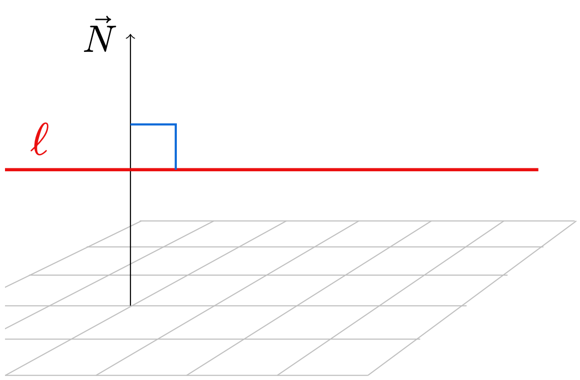
3. נרשום את משוואת הישר: $\ell : \underline{x} = (0,-5,3) + t\,(1,0,0)$
(ניתן לבחור וקטור קולינארי ל- $(-1,0,0)$ ולכן נבחר $(1,0,0)$).

המצב ההדדי בין ישר למישור

בד"כ נציב נקודה כללית של הישר במשוואת המישור ונבדוק את מספר הפתרונות:

1. אם אין פתרון (אין כל נקודת חיתוך משותפת) הישר מקביל למישור,
2. אם יש נקודת חיתוך אחת (פתרון יחיד), הישר חותך את המישור,
3. אם יש אינסוף נקודות משותפות, הישר מוכל במישור.

בדיקה חלופית:



- אם הישר מאונך לנורמל (בדיקת התאפסות מכפלה סקלרית של וקטור הכיוון של הישר, עם הנורמל למישור), אז הוא **מוכל במישור או מקביל לו**, ונותר לברור בין שתי האפשרויות.
- בכל מקרה אחר - הוא חותך את המישור.

המצב ההדדי בין מישורים

מישורים יכולים להיות מקבילים, נחתכים, או מתלכדים.

1. במקרה של התלכדות המשוואות הן זהות (או שאחת היא כפל בקבוע של האחרת).
2. אם הנורמלים קולינאריים, המישורים מקבילים,
3. בכל מקרה אחר, הם נחתכים.

חישוב מרחקים וזויות

זווית בין וקטורים, ובין מישורים

מתבססת על הנוסחה: $\cos\alpha = \frac{\underline{u}\cdot\underline{v}}{|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|}$. בנוסחא נוסף ערך מוחלט במונה:

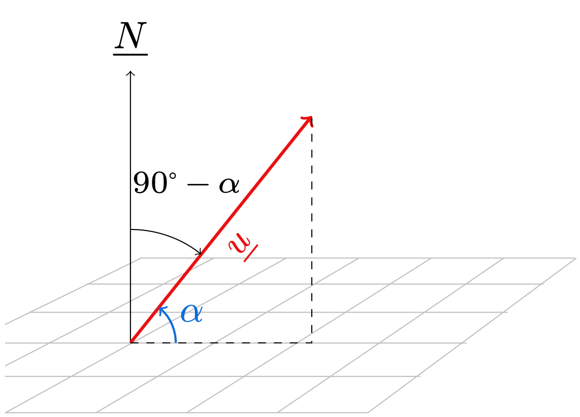
$$\cos\alpha = \frac{|\underline{u}\cdot\underline{v}|}{|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|} = \frac{|u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3|}{\sqrt{(u_1^2+u_2^2+u_3^2)(v_1^2+v_2^2+v_3^2)}}$$

חשוב:

1. לבדוק במחשבון.
2. ללא ע"מ, אם $\cos\alpha < 0$ תתקבל הזווית הכהה (ודרושה לנו הזווית החדה).
3. אותה הנוסחה מופיעה בדף הנוסחאות למציאת זווית בין מישורים (שהיא הזווית החדה בין הנורמלים שלהם) כך:
   מציאת זווית בין המישורים $\underline{v_2}\cdot\underline{x}+e_1=0$, $\underline{v_1}\cdot\underline{x}+e_2=0$:

$$\cos\alpha = \frac{\left|\underline{v_1}\cdot\underline{v_2}\right|}{\left|\underline{v_1}\right|\cdot\left|\underline{v_2}\right|}$$

זווית בין ישר למישור



הזוית מבוססת על אותה הנוסחה. אם α היא הזווית בין הישר למישור, אז הזווית בין הישר לנורמל היא $90-\alpha$.

מכפלה סקלרית בין וקטור הכיוון של הישר לבין הנורמל, תחזיר לנו את $\cos(90-\alpha)$. בדף הנוסחאות נשענים על הזהות $\cos(90-\alpha)=\sin\alpha$, ולכן מופיעה הנוסחה הבאה:

מציאת זווית בין הישר $\underline{a}+t\underline{b}$ למישור $\underline{v}\cdot\underline{x}+e=0$

$$\boxed{\sin\alpha = \frac{|\underline{v}\cdot\underline{b}|}{|\underline{v}|\cdot|\underline{b}|}}$$

ניתן כמובן לעבוד עם הנוסחה המקורית של מכפלה סקלרית (כלומר לבצע $\cos^{-1}$ על הערך המוחלט), ולזכור שהזוית המתקבלת אינה הזוית בין הישר למישור, וצריך לחשב $90^\circ - \mathrm{Ans}$. זוהי הערה חשובה מפני שבבדיקות מחשבון חישוב זוויות הוא בין וקטורים ונקבל את $90^\circ - \alpha$.

מרחק נקודה ממישור - ללא נוסחה

מרחק הוא אורך הקטע הקצר ביותר המחבר את נקודה למישור. לכן לקבלת המרחק:

1. נעביר ישר היוצא מהנקודה (בכיוון הנורמל).
2. נחשב נקודה כללית של הישר,
3. נציב במשוואת המישור. ונקבל נקודת חיתוך בין הישר למישור.
4. נחשב מרחק בין שתי הנקודות.

מרחק נקודה ממישור - הנוסחה

הנוסחה מופיעה בדף הנוסחאות ברישום מקוצר:

מרחק בין נקודה $\underline{p}$ למישור $\underline{v}\cdot\underline{x}+e=0$: (הרישום מוסבר בתת-פרק משוואת המישור).

$$\frac{\left|\underline{v}\cdot\underline{p}+e\right|}{|\underline{v}|}$$

מרחק בין נקודות

- זהה לאורך הוקטור שבין 2 הנקודות (ראו אורך וקטור)
- מסתמך על נוסחת מרחק רגילה מהחטיבה (פיתגורס). בתוך השורש סוכמים 3 רכיבי "ריבוע הפרש" במקום 2. הנוסחה אינה בדף הנוסחאות.
- בדיקה במחשבון באמצעות $Abs(VecB - VecA)$